



Funkce, rovnice a jejich užití

Goniometrické vzorce – sbírka

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M3_25

23. 1. 2014

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list se základními vzorci, zadáním úloh a jejich řešením.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Goniometrické vzorce - sbírka

Z poměrů v pravouhlém trojúhelníku plyne:

$$\begin{aligned} Ia) \quad & \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ Ib) \quad & \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \\ Ic) \quad & \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1 \quad \text{pro } x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Z poměrů na jednotkové kružnici plyne:

$$IIa) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Sinus (kosinus) součtu (rozdílu)

$$\begin{aligned} IIIa) \quad & \sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \sin y \\ IIIb) \quad & \sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \sin y \\ IIIc) \quad & \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y \\ IIId) \quad & \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

Z IIIa) a IIIc) přímo plyne sinus (kosinus) dvojnásobného argumentu

Sinus (kosinus) polovičního argumentu

$$\begin{aligned} IVa) \quad \sin(2x) &= 2 \sin x \cdot \cos x & VIa) \quad \left| \sin \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ IVb) \quad \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & VIb) \quad \left| \cos \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \end{aligned}$$

Součet (rozdíl) sinů (kosinů)

$$\begin{aligned} Va) \quad & \sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \\ Vb) \quad & \sin x - \sin y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \\ Vc) \quad & \cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \\ Vd) \quad & \cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \end{aligned}$$

Sbírka

I. Zjednodušte užitím součtových vzorců:

1. $\sin(x+y) + \sin(x-y)$

2. $\cos(x+y) - \cos(x-y)$

3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

5. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

6. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

II. Pomocí součtových vzorců vypočítejte:

1. $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ =$

2. $2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ =$

III. Dokažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

1. $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin 2x - \sin 2y$

2. $\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos 2x + \cos 2y - 1$

3. $\cos x + \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) = 0$

IV. Vyjádřete uvedené výrazy pomocí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{tg} y$

1. $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$

$$2. \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$$

$$3. \frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}$$

$$4. \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{\sin(x+y)-\sin(x-y)}$$

V. Určete bez použití tabulek a kalkulačky

1. $\sin 75^\circ$

2. $\cos 165^\circ$

3. $\sin 165^\circ$

Řešení

I 1) $2 \sin x \cos y$ 2) $-2 \sin x \sin y$ 3) 0 4) $-2 \sin x$
 5) $\cos x$ 6) $\sin x$

II 1) 1 2) 0

III platí pro $x, y \in \mathbb{R}$

IV 1) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}$ 2) $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$ 3) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$ 4) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}$

V 1) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ 2) $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ 3) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Goniometrické vzorce – sbírka
Číslo DUM	VY_42_inovace_M3_25
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	23. 1. 2014
Předmět	Matematika
Ročník	P3
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list se základními vzorci, zadáním úloh a jejich řešením.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	