



Funkce, rovnice a jejich užití

Goniometrické rovnice

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M3_21

18. 11. 2013

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list se zadáním a řešením jednotlivých typů goniometrických rovnic.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice jsou rovnice, které obsahují nějakou goniometrickou funkci, tedy sinus, kosinus, tangens nebo kotangens.

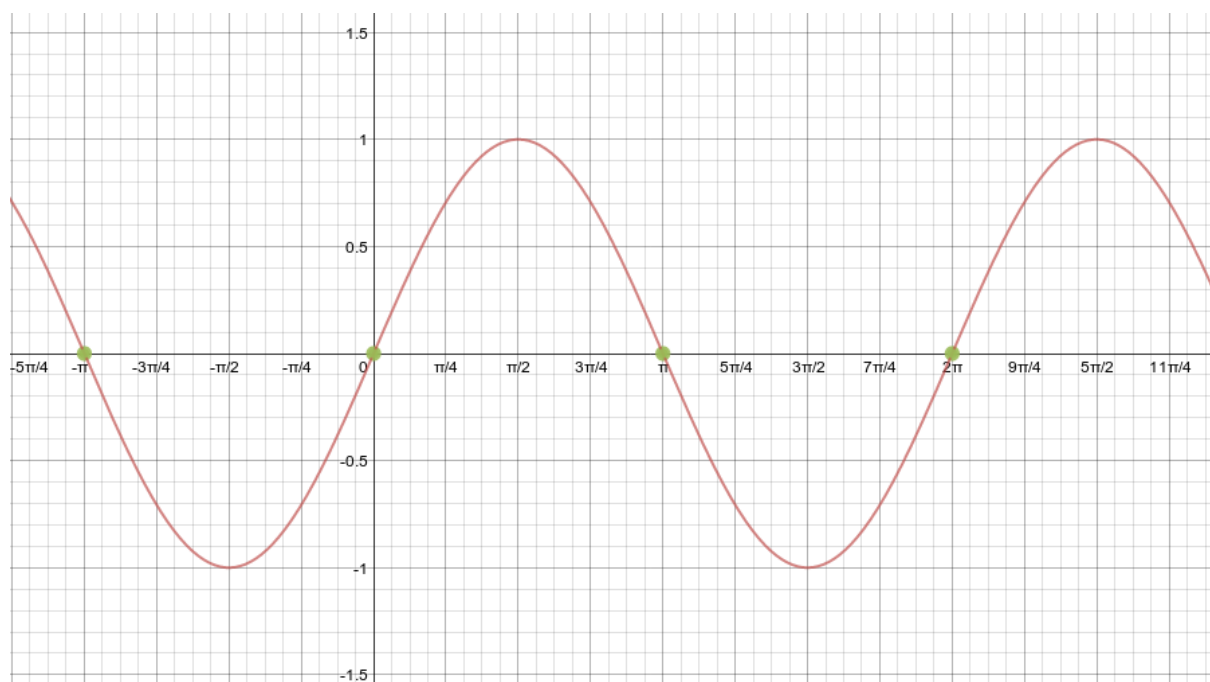
Algebraické řešení goniometrické rovnice vyplývá a vždy souvisí z jasné představy související goniometrické funkce.

Příklad 1

Řešte goniometrickou rovnici $\sin x = 0$.

Nějaké algebraické řešení, jakýsi magický vzorec pro výpočet kořenů, není. Vše je ale zřejmé, podíváme-li se na graf. Funkce $\sin x$ nabývá nulové funkční hodnoty v bodech $-\pi, 0, \pi, 2\pi$ a mnohých dalších. Protože sinus je periodická funkce, budou mezi jednotlivými řešeními rovnice pravidelné intervaly - v tomto případě intervaly o délce π .

Množina řešení je tedy nekonečná. Jsou to všechny reálné násobky π . V tomto případě je můžeme zapsat způsobem:



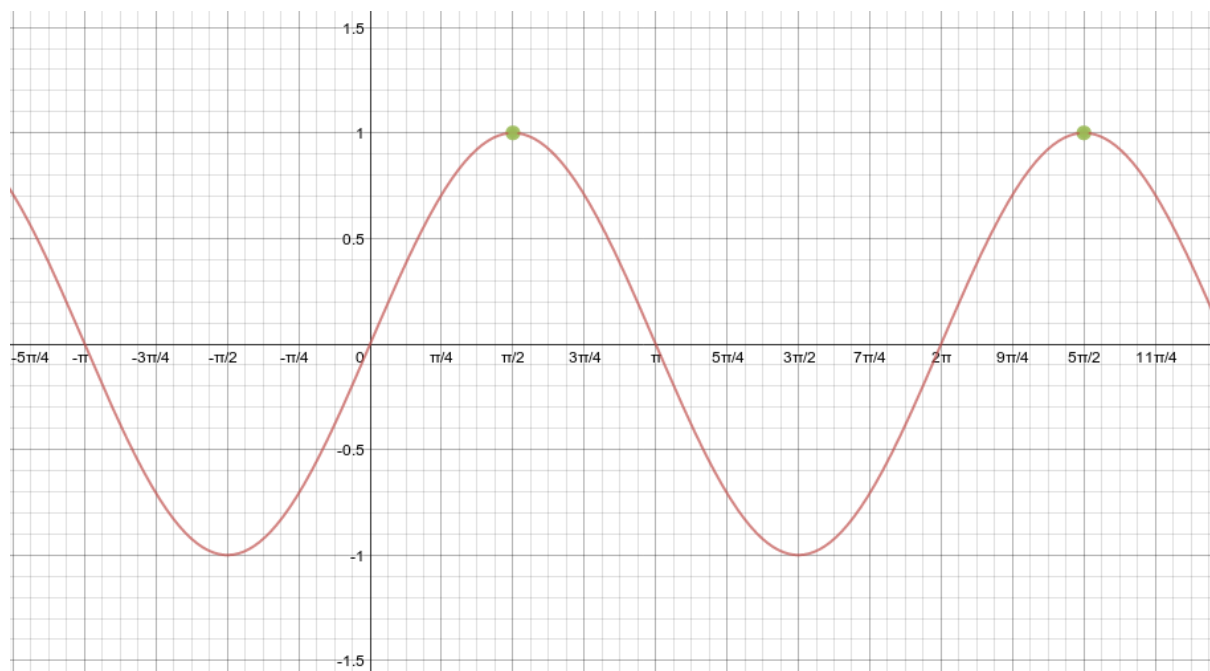
$$x = k\pi; \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

Příklad 2

Řešte goniometrickou rovnici $\sin x = 1$.

Situace je obdobná - nějaké algebraické řešení, jakýsi magický vzorec pro výpočet kořenů, není. Vše je ale zřejmé, podíváme-li se na graf.

Množina řešení je nekonečná. V tomto případě je můžeme zapsat způsobem:



$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

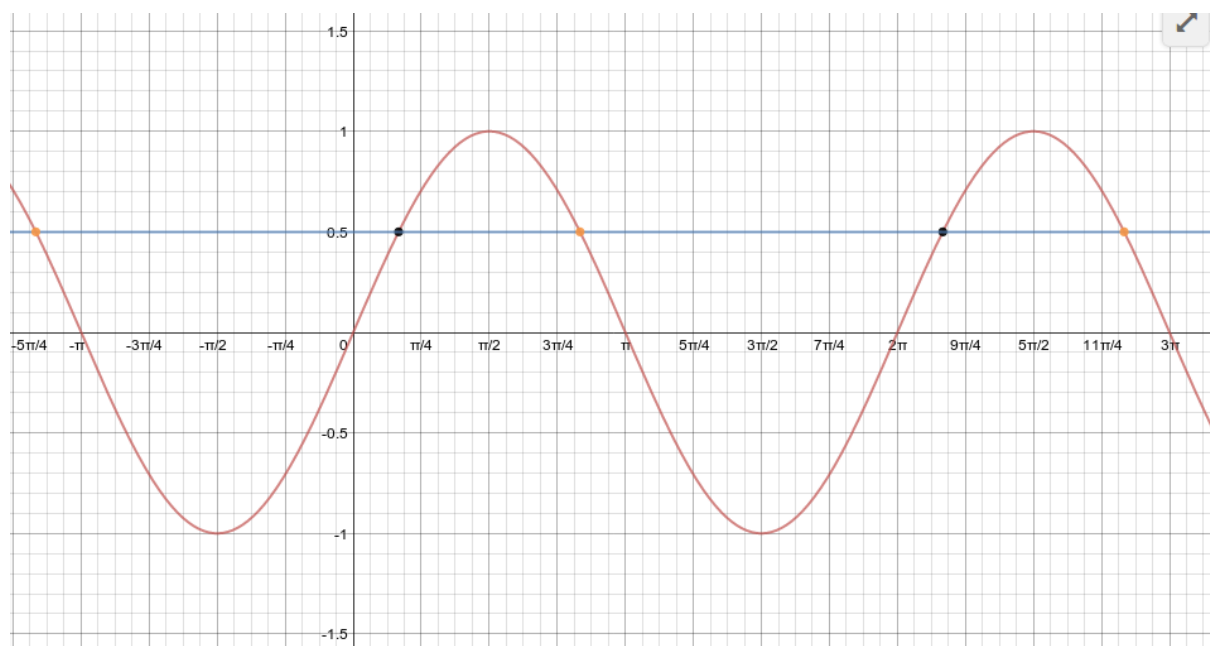
Příklad 3

Řešte goniometrickou rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$.

Z grafu je zřejmé, že funkce tentokrát nabývá funkční hodnotu 0,5 dvojím způsobem.

Jedny (je to nekonečná množina) kořeny znázorňují **černé body**,

druhé (je to nekonečná množina) kořeny znázorňují **oranžové body**.



A jelikož už známe (něco si člověk pamatovat musí - a mělo by to být o malinko víc než jen své jméno a značku svých značkových krámů a hadříků!) funkční hodnoty základních orientovaných úhlů, můžeme zapsat řešení.

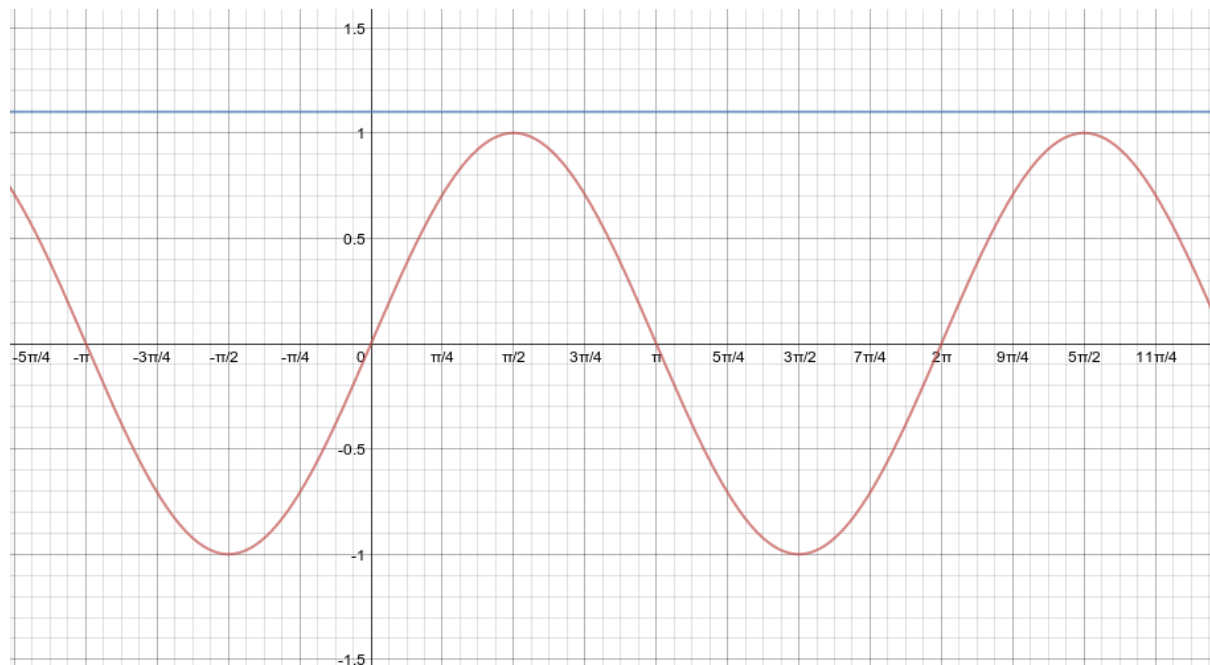
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

Příklad 4

Řešte goniometrickou rovnici $\sin x = 1,1$.

Z grafu je zřejmé, že funkce žádnou takovou funkční hodnotu nikdy nenabude.



$$x \in \emptyset$$

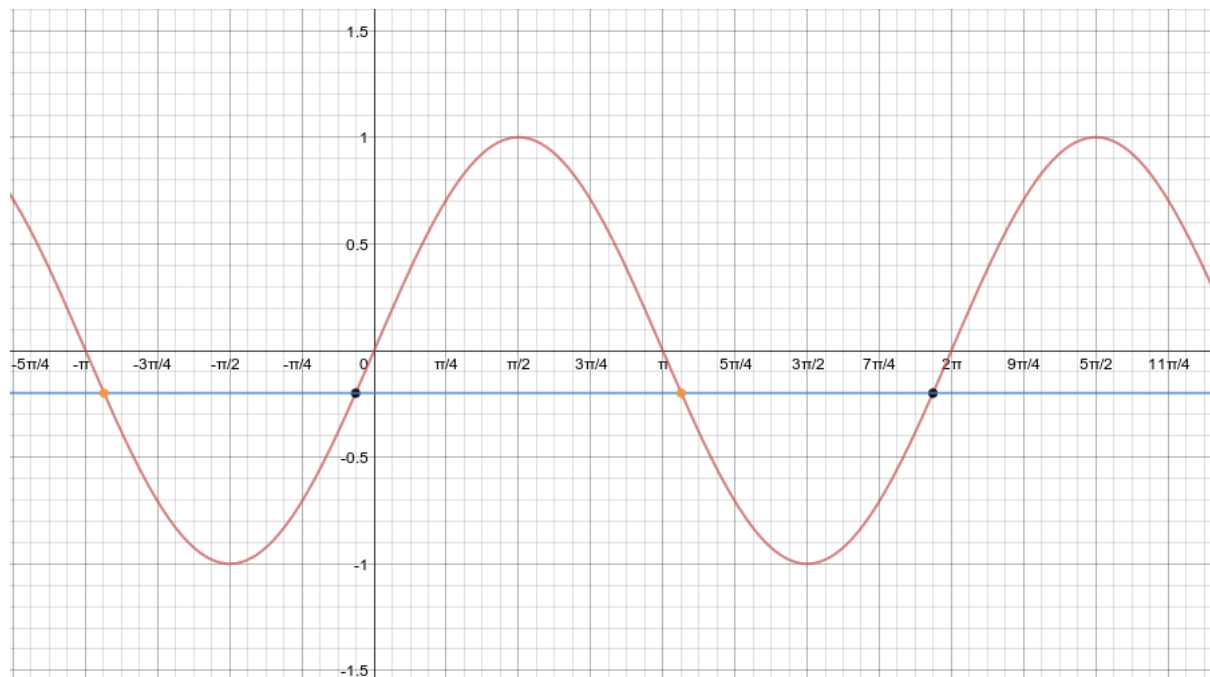
Příklad 5

Řešte goniometrickou rovnici $\sin x = -0,2$.

Z grafu je zřejmé, že funkce tentokrát nabývá funkční hodnotu 0,5 dvojnásobkem.

Jedny (je to nekonečná množina) kořeny znázorňují **černé body**,

druhé (je to nekonečná množina) kořeny znázorňují **oranžové body**.



Pomocí kalkulačky určíme x' , jestliže $\sin x' = -0,2$

Kalkulačka vrací pro funkci sinus hodnoty **pouze** v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$

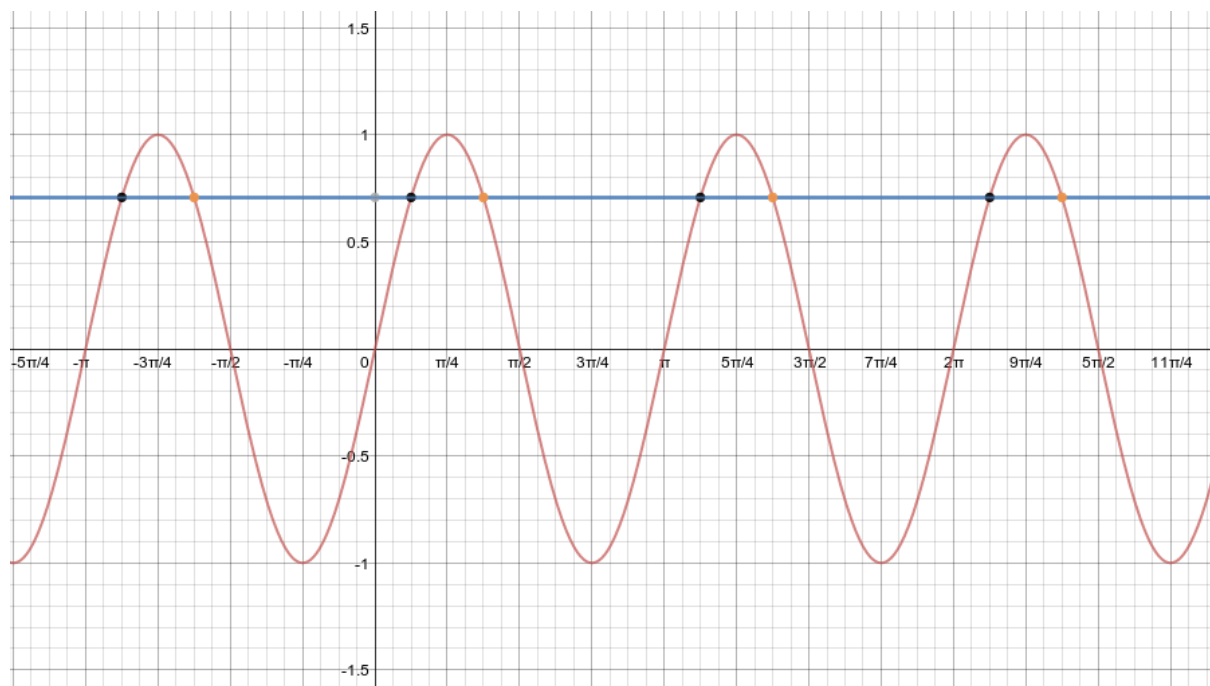
V daném případě to je $x' = -0,198669330795 = -0,063270488 \pi$

$$x_1 = -0,063270488 \pi + 2k\pi = 1,936729512 \pi + 2k\pi$$

$$x_2 = \pi + 0,063270488 \pi + 2k\pi = 1,063270488 \pi + 2k\pi$$

Příklad 6

Řešte goniometrickou rovnici $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Z grafu v tomto případě můžeme odečíst kořeny:

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi; \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{8} + k\pi; \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

Povšimněte si několika „drobností“:

- vycházíme z grafu funkce $\sin 2x$, jehož konstrukce nemusí být snadná
- kořeny mají **jinou** periodu - π
- víme, že funkce sinus nabývá funkční hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pro argument roven $\frac{\pi}{4}$

Řešení takovýmto způsobem sice možné je, ale nemusí to být jednoduché a zřejmé.

Substituce

Pokud máme ve funkci nějaký složitější výraz, můžeme použít substituci, neboli nahrazení. Například chceme-li spočítat výsledek rovnice $\sin 2x = 1$, nahradíme si (provedeme substituci) $a = 2x$ a dále již počítáme s rovnicí ve tvaru $\sin a = 1$ stejně jako jsme si ukázali v předchozí kapitole. Substituce obvykle probíhá tak, že vezmeme argumenty funkce, v tomto případě $2x$, a na místo nich napíšeme nějakou jinou neznámou. Můžeme si ji pojmenovat celkem jakkoliv, tady jsme zvolili název a . Mohli bychom klidně provést substituci $q = 2x$ nebo pomeranč = $2x$ a pak psát $\sin \text{pomeranč} = 1$. Substituce nám tak zjednodušuje výraz, který právě počítáme. S tím, že výraz a je ve skutečnosti rovný $2x$, se vypořádáme později.

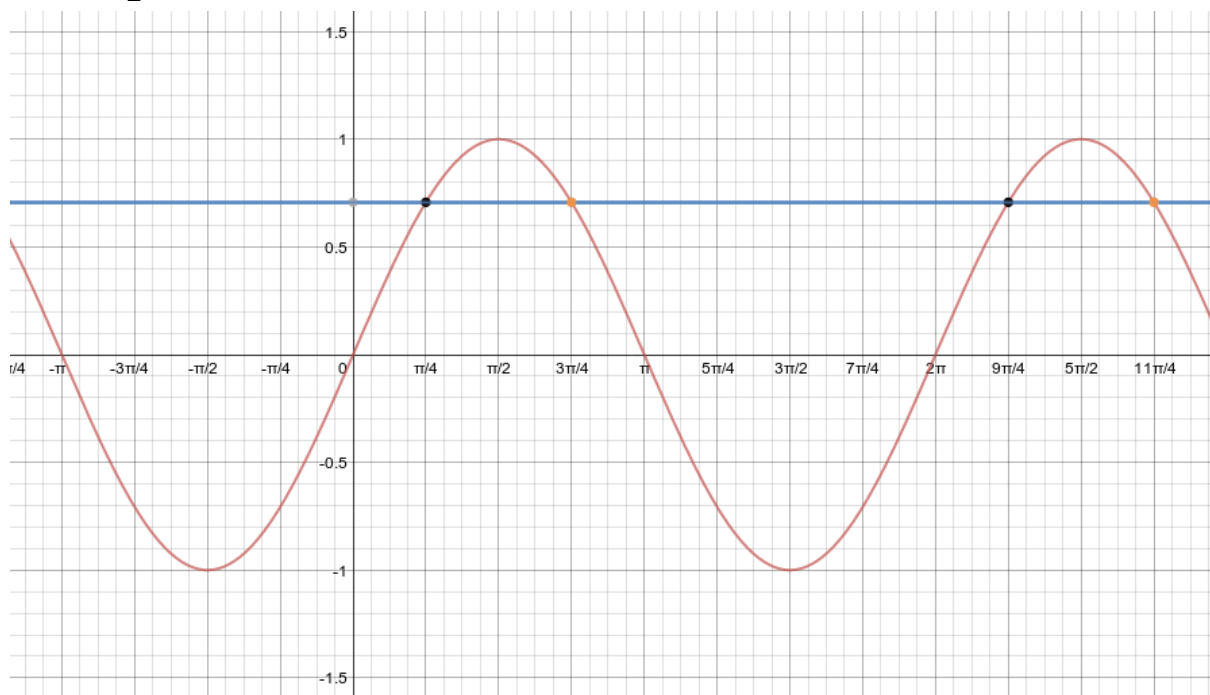
Příklad 7

Řešte goniometrickou rovnici $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Substituce

$$t = 2x$$

$$\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$t_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Nás ale nezajímalo nějaké t , ale chtěli jsme vědět, kolik je x .

Dosadíme zpět do substituce $t=2x$

$$t_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x_1 = \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) : 2$$

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi$$

$$t_2 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

$$2x_2 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

$$x_2 = \left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) : 2$$

$$x_2 = \frac{3}{8}\pi + k\pi$$

Řešení rovnice $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tedy je

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi; \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{3}{8}\pi + k\pi; \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

Příklad 8

Řešte goniometrickou rovnici $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

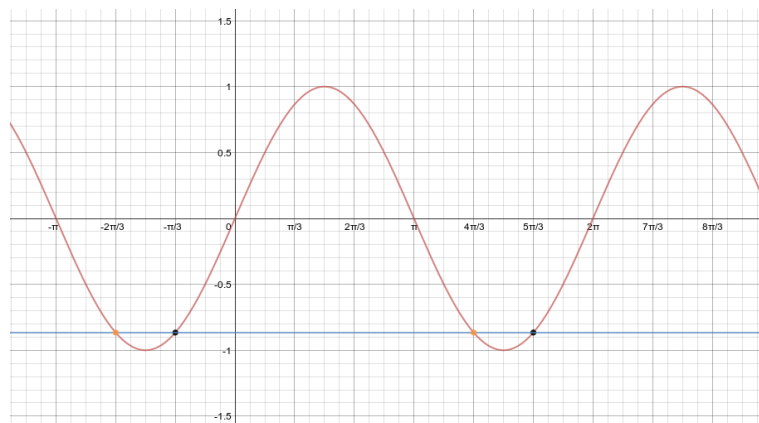
Substituce

$$t = 3x - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t_1 = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$t_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$



$$t_1 = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$3x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$3x = \frac{5}{3}\pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$3x = \frac{13}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x = \left(\frac{13}{6}\pi + 2k\pi\right) : 3$$

$$x_1 = \frac{13}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

$$t_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

$$3x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$3x = \frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$3x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x = \left(\frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right) : 3$$

$$x_2 = \frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

Řešení rovnice $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ tedy je

$$x_1 = \frac{13}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi; \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi; \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Goniometrické rovnice
Číslo DUM	VY_42_inovace_M3_21
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	18. 11. 2013
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list se zadáním a řešením jednotlivých typů goniometrických rovnic.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	