Střední škola podnikání
Vysoké Mýto
Malá škola - velká rodina

Funkce, rovnice a jejich užití

Kvadratická rovnice

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_32

17. 03. 2014

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list se zadáním a řešením jednotlivých typů kvadratických rovnic.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kvadratická rovnice

Kvadratická rovnice je každá rovnice, která je zapsaná nebo ji lze zapsat ve tvar:

$$a\,x^2+bx+c=0$$

$$a\,,b\,,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0$$

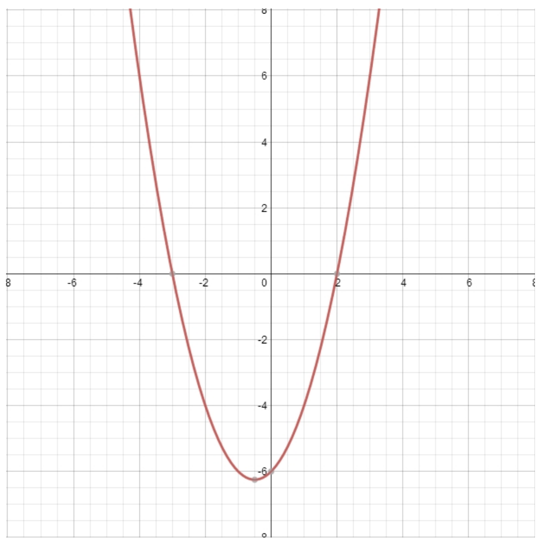
Algebraické řešení kvadratické rovnice $a\,x^2+bx+c=0$ vyplývá z jasné představy související kvadratické funkce $y=a\,x^2+bx+c$.

Příklad 1

Řešte kvadratickou rovnici $x^2+x-6=0$.

Graf související funkce $y=x^2+x-6$ **protíná** osu *x* v bodech, kde *f(x)* = 0, což jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2+x-6=0$; v našem případě to jsou body **−3** a **2**.[1]

Řešením rovnice jsou $\begin{matrix} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{matrix}$.



Graf 1

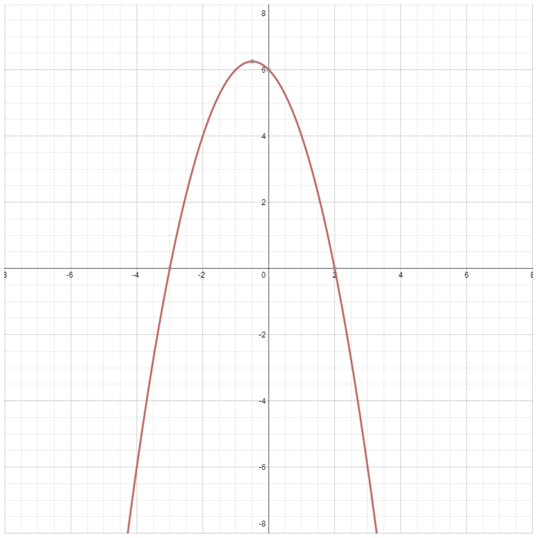
1 $f(-3)=0 \leftrightarrow x_1=-3$
$f(2)=0 \leftrightarrow x_2=2$

Příklad 2 **úloha zdánlivě podobná**

Řešte kvadratickou rovnici $-x^2-x+6=0$.

Graf související funkce $y=-x^2-x+6$ **protíná** osu *x* v bodech, kde *f(x)* = 0, což jsou kořeny kvadratické rovnice $-x^2-x+6=0$; v našem případě to jsou body **−3** a **2**.[2]

Řešením rovnice jsou $\begin{matrix} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{matrix}$.



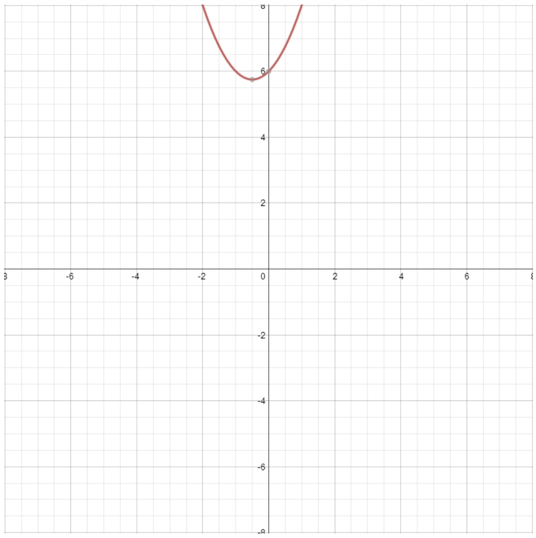
Graf 2

Příklad 3 **úloha zdánlivě podobná**

Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+6=0$.

Graf související funkce $y=x^2+x+6$ **neprotíná** osu *x* v žádných bodech.

Rovnice nemá řešení $x_{1,2}\in\emptyset$.



Graf 3

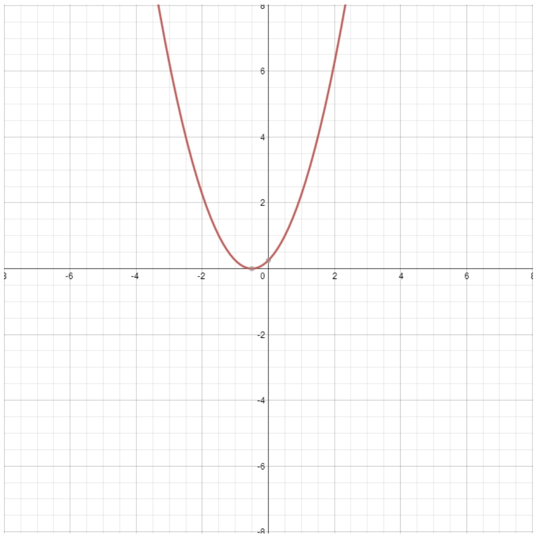
2 $f(-3)=0 \leftrightarrow x_1=-3$
$f(2)=0 \leftrightarrow x_2=2$

Příklad 4 **úloha zdánlivě podobná**

Řešte kvadratickou rovnici $x^2+x+0,25=0$.

Graf související funkce $y=x^2+x+0,25$ **se dotýká** osy *x* v bodě, kde *f(x)* = 0, což je kořen (dvojnásobný) kvadratické rovnice $-x^2-x+6=0$; v našem případě to je bod **-0,5**.[3]

Řešením rovnice je $x_{1,2}=-0,5$.



Graf 4

Při řešení **kvadratické** rovnice mohou nastat pouze tři různé případy

- rovnice má **dva** kořeny
- rovnice má jeden **dvojnásobný** kořen
- rovnice **nemá** kořeny

Konstrukce grafu je většinou obtížná a odečítání z grafu je zpravidla nepřesné. Proto je namístě i algebraické řešení. Alespoň částečná představa grafu je ale vždy velmi užitečná.

Příklad 5

Nalezněte kořeny kvadratické rovnice $a\,x^2+bx+c=0$.

Lze ukázat, že poloha odpovídající paraboly je určena vztahem $b^2-4\,a\,c$, který nazýváme **diskriminant** kvadratické rovnice $a\,x^2+bx+c=0$ a krátce značíme D.

$$D=b^2-4\,a\,c$$

Diskriminant může nabývat záporné hodnoty, může být roven nule nebo nabývat kladné hodnoty – na těchto třech možnostech záleží kořeny.

3 $f(-0,5)=0 \quad \leftrightarrow \quad x_{1,2}=-0,5$

Při řešení **kvadratické** rovnice $a x^2+bx+c=0$ mohou nastat pouze tři různé případy

- rovnice má **dva** kořeny x_1 , x_2 **dva** průsečíky s o_x **D > 0**
- rovnice má jeden **dvojnásobný** kořen $x_{1,2}$ **jeden** průsečík s o_x **D = 0**
- rovnice **nemá** kořeny **nemá** průsečík s o_x **D < 0**

kde $D=b^2-4ac$ je diskriminant.

Pro kořeny rovnice pak platí

- jestliže D > 0, pak $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ a $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$
- jestliže D = 0, pak $x_{1,2}=\frac{-b}{2a}$
- jestliže D < 0, pak $x_{1,2}\in\emptyset$

Pro praktické počítání lze předchozí shrnout do jediného vzorce, s nímž ale bude třeba zacházet velmi obezřetně

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Pravidla

- pokud existuje druhá odmocnina (větší než nula) jednou ji přičteme – první kořen a podruhé ji odečteme – druhý kořen
- pokud je druhá odmocnina 0, rovnice má jeden dvojnásobný kořen
- pokud je pod odmocninou záporné číslo, rovnice nemá řešení

Příklad 6

Řešte kvadratickou rovnici $x^2+x-6=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}$$

$$x_1=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

Viz Příklad 1

Příklad 7

Řešte kvadratickou rovnici . $x^2+x+0{,}25=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot0{,}25}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{-1}{2}$$

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}$$

Viz Příklad 4

Příklad 8

Řešte kvadratickou rovnici . $x^2+x+6=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{2}\qquad\Rightarrow$$

$$x_{1,2}\in\emptyset$$

Viz Příklad 3

Příklad 9

Řešte kvadratickou rovnici . $2x^2+3x-5=0$

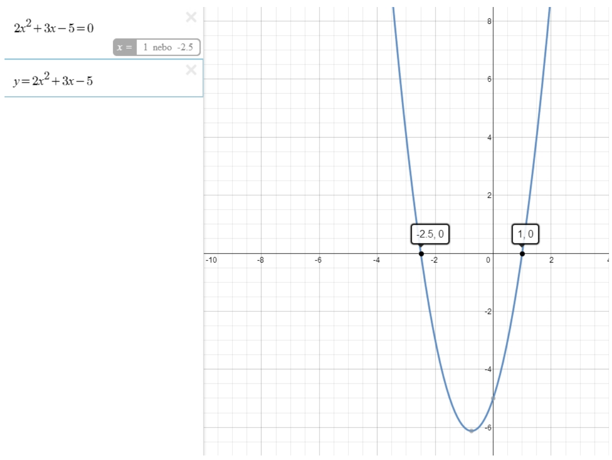
$$D=3^2-4\cdot2\cdot(-5)=49$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{4}=$$

$$=\frac{-3\pm7}{4}$$

$$x_1=\frac{-3+7}{4}=1$$

$$x_1=\frac{-3-7}{4}=-\frac{5}{2}$$



Vzorec

Kvadratická rovnice $a x^2+bx+c=0$ má kořeny

dva $b^2-4ac>0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

jeden dvojnásobný $b^2-4ac=0$

nemá kořeny $b^2-4ac<0$

Výpočet kořenů pomocí vzorce je **vždy** možný a spolehlivý, ale ne vždy je snadný.

V některých případech lze kořeny určit daleko rychleji a snadněji.

Pomůcky

Součin je 0, když jeden nebo druhý činitel je 0.

$a\cdot b=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0 \vee b=0$

Druhá mocnina každého čísla je vždy **nezáporná**.

$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$

Kvadratický trojčlen lze pomocí vzorce zapsat jako druhou mocninu součtu (rozdílu).

$$9x^2+30x+25=0$$

$$(3x+5)^2=0$$

$$3x+5=0$$

$$x_{1,2}=-\frac{5}{3}$$

Bez absolutního (konstantního) členu $a x^2+bx=0$

vytknutím *x* z obou členů lze převést na součin

$$9x^2+30x=0$$

$$3x(3x+10)=0$$

$$3x=0 \quad \vee \quad 3x+10=0$$

$$x_1=0 \quad \vee \quad x_2=-\frac{10}{3}$$

Ryze kvadratická (bez lineárního členu) $a x^2+c=0$

$9x^2-25=0$

$9x^2=25$

$x^2=\frac{25}{9}$

$x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}$

$x_{1,2}=\pm\frac{5}{3}$

Ale pozor!

$9x^2+25=0$

$9x^2=-25$

$x^2=-\frac{25}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}\in\emptyset$

Vietovy vzorce (v normovaném tvaru, tj. a = 1) $x^2+bx+c=0$

$x_1+x_2=-b$

$x_1\cdot x_2=c$

$x^2-11x+24=0$	$x^2+11x+24=0$	$x^2-5x-24=0$	$x^2+5x-24=0$
$3\cdot 8=24$ $3+8=-(-11)$	$(-3)\cdot(-8)=24$ $(-3)+(-8)=-(+11)$	$-3\cdot 8=-24$ $-3+8=-(-5)$	$3\cdot(-8)=-24$ $3+(-8)=-(+5)$
$x_1=3$ $x_2=8$	$x_1=-3$ $x_2=-8$	$x_1=-3$ $x_2=8$	$x_1=3$ $x_2=-8$

$x^2-10x-24=0$	$x^2+10x+24=0$	$x^2-25x+24=0$	$x^2-5x+24=0$
$-2\cdot 12=-24$ $-2+12=-(-10)$	$(-4)\cdot(-6)=24$ $(-4)+(-6)=-(+10)$	$1\cdot 24=24$ $1+24=-(-25)$	$x_{1,2}\in\emptyset$
$x_1=-2$ $x_2=12$	$x_1=-4$ $x_2=-6$	$x_1=1$ $x_2=24$	

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Kvadratická rovnice
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_32
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	17. 03. 2014
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list se zadáním a řešením jednotlivých typů kvadratických rovnic.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	