



Funkce, rovnice a jejich užití

Kvadratická funkce

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_31

06. 03. 2014

Mgr. Pavel Někvinda

Pracovní listy s výkladem, s řešenými modelovými příklady, se zadáním a řešením příkladů k procvičení grafů kvadratických funkcí.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je každá funkce, která je zapsaná nebo ji lze zapsat ve tvaru:

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

kde a, b, c jsou reálné koeficienty a $a \neq 0$.

Výraz $ax^2 + bx + c$ se nazývá kvadratický trojčlen, kde

ax^2 je kvadratický člen,

bx člen lineární a

c je člen absolutní (konstantní)

a je koeficient kvadratického členu

b je koeficient lineárního členu

c je koeficient absolutního (konstantního) členu

Kvadratické funkce jsou časté v geometrii, ve fyzice a životě vůbec - obsah čtverce $S = a^2$ nebo kruhu $S = \pi r^2$, $s = \frac{1}{2}at^2$, $E = \frac{1}{2}mv^2$, $E = mc^2$, $P = RI^2$

Graf

Grafem kvadratické funkce je křivka, která se nazývá **parabola**. Parabola má jeden význačný bod - **vrchol**, ve kterém má minimum nebo maximum.

Elementární¹ funkce

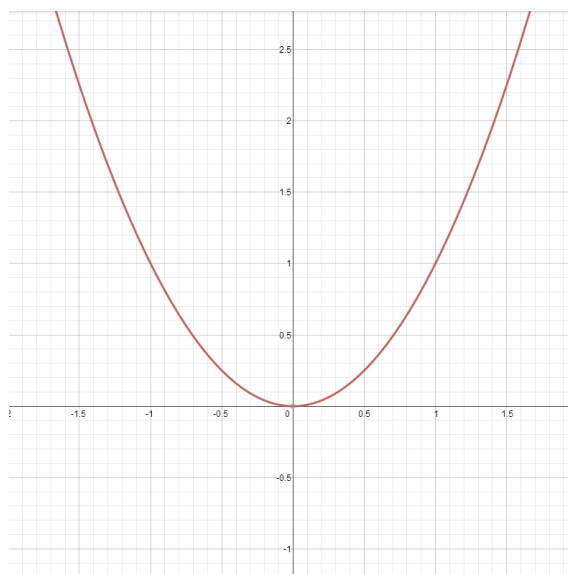
$$f: y = x^2 \quad \text{kde } a=1; b=0; c=0$$

Graf *základní parabola*

souřadnice vrcholu $V[0;0]$

význačné body $[1;1]$
 $[-1;1]$

parabola *osově souměrná podle o_y*



Obr. 1: Taky elementární kvadratická funkce

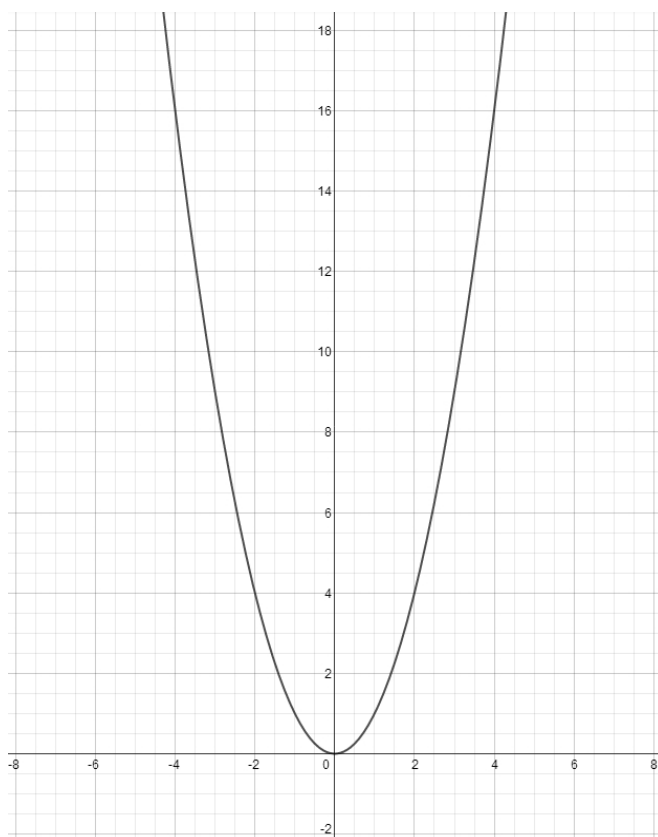
1 Elementární neboli základní, ta nejjednodušší ze všech kvadratických funkcí

Vlastnosti elementární kvadratické funkce

1. $D(f) = \mathbb{R}$
 $H(f) = \langle 0; \infty \rangle$
2. Není monotónní
3. Je zdola omezená
4. Je sudá
5. Není prostá
6. Je spojitá
7. Má minimum 0 v bodě 0 (vrchol)

Tabulka funkčních hodnot pro některé body elementární kvadratické funkce

					V										
x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,1	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	
y	9	4	1	0,25	0	0,01	0,625	0,25	1	4	9	16	25	36	



Obr. 2

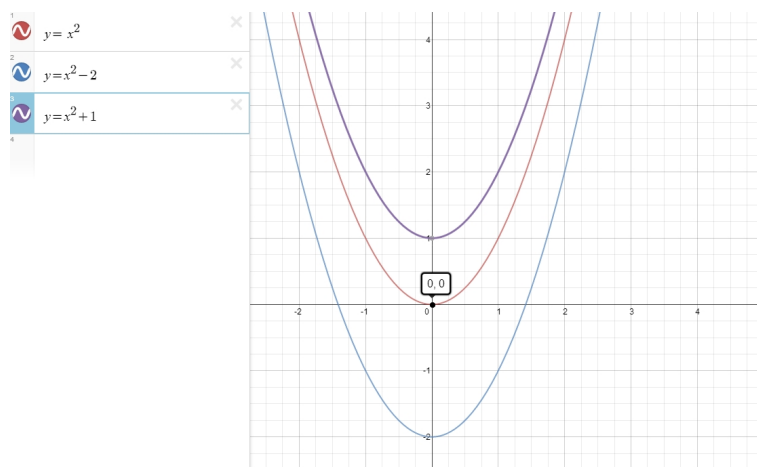
Práce s grafem

Vždy vyjdeme ze tvaru a umístění *základní paraboly*.

- **Posun ve směru osy y**

$$y = x^2 + p$$

V [0;p]

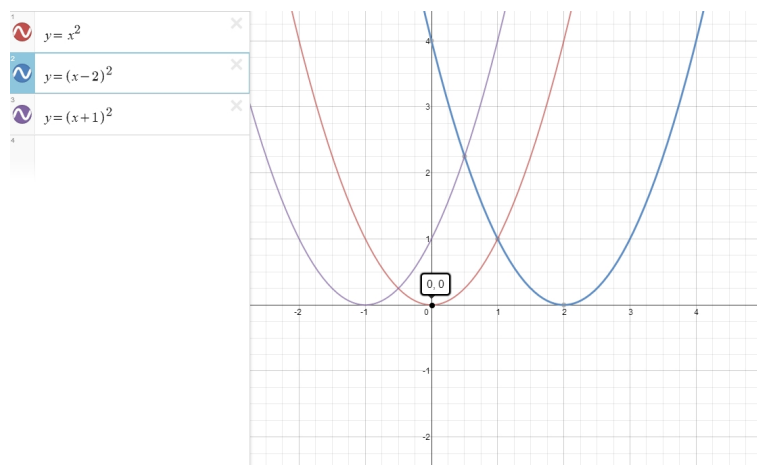


Obr. 3

- **Posun ve směru osy x**

$$y = (x - x_0)^2$$

V [-x₀;0]

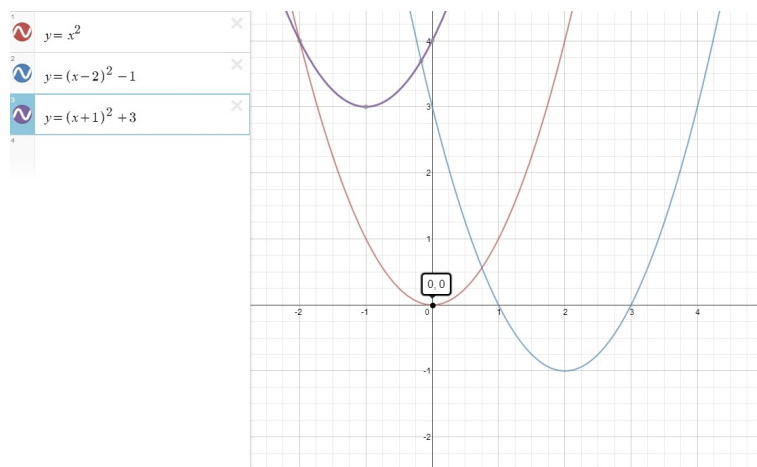


Obr. 4

- **Posun ve směru os x, y**

$$y = (x - x_0)^2 + p$$

V [-x₀;p]



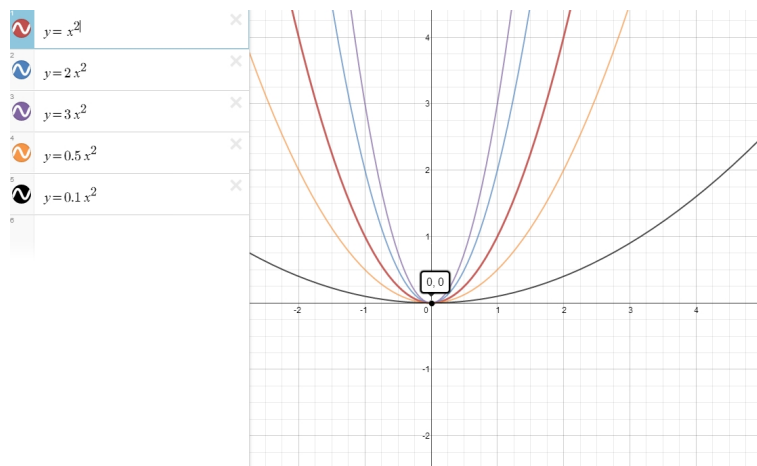
Obr. 5

- **Změna „tvaru“**

$$y = a x^2$$

|a| ... strmost

V [0;0]



Obr. 6

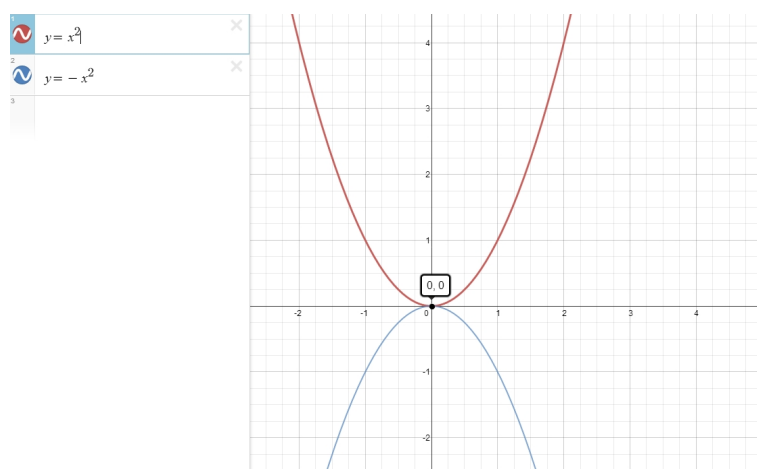
- **Změna „orientace“**

$$y = -x^2$$

a > 0 ... V dole

a < 0 ... V nahoře

V [0;0]



Obr. 7

- **Všecko postupně najednou**

Načrtněte graf fce

$$y = -0,5(x-2)^2 + 3$$

Sledujte sled

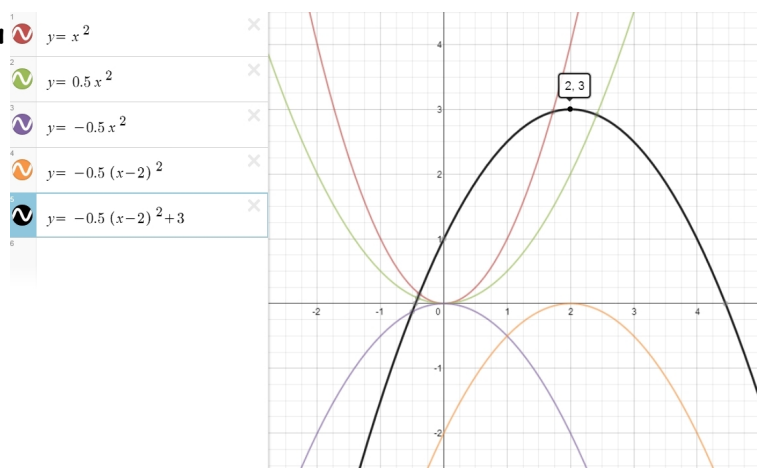
$$y = x^2$$

$$y = 0,5 x^2$$

$$y = -0,5 x^2$$

$$y = -0,5(x-2)^2$$

$$y = -0,5(x-2)^2 + 3$$



Obr. 8

Doplnění na čtverec

Pro náčrtek grafu je výhodný tvar funkčního předpisu $y = a(x - x_0)^2 + p$. Ten základní funkční předpis je ale tvaru $y = ax^2 + bx + c$. Lze, a když ano, tak jak, jeden tvar funkčního předpisu převést na druhý? Zcela čekaně zní odpověď *ano*. Nyní už jen zbývá ukázat jak.

$$1. \text{ Z } y = a(x - x_0)^2 + p \text{ na } y = ax^2 + bx + c$$

Umocněním dvojčlenu v závorce **snadno** dosáhneme kýženého cíle

$$y = a(x - x_0)^2 + p = a(x^2 - 2x_0x + x_0^2) + p = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 + p = ax^2 + bx + c$$

$$a = a$$

$$\text{kde } b = -2ax_0$$

$$c = ax_0^2 + p$$

Příklad 1

$$\begin{aligned} y &= 4(x - 3)^2 - 11 = \\ &= 4(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2) - 11 = \\ &= 4(x^2 - 6x + 9) - 11 = \\ &= 2x^2 - 12x + 18 - 11 = \\ &= 2x^2 - 12x + 7 \end{aligned}$$

$$2. \text{ Z } y = ax^2 + bx + c \text{ na } y = a(x - x_0)^2 + p$$

„Stačí“ projít celý proces v 1. zpětně. Takovému tričku se říká **doplnění na čtverec**. Využijeme k tomu staré známé algebraické vzorce $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$. A celé ukážeme na příkladu.

Příklad 2

Náčrtněte graf funkce $f: y = 2x^2 - 12x + 7$

1. Jelikož chceme předpis se závorkou $(x - x_0)^2$, ze členů ax^2 , bx **vytkneme** a

$$2x^2 - 12x + 7 = 2[x^2 - 6x] + 7$$

2. x^2 odpovídá A^2 \rightarrow x odpovídá A

$$-6x \text{ odpovídá } -2AB \quad \rightarrow \quad 6 \text{ odpovídá } 2B \quad \rightarrow \quad B = 6 : 2 = 3$$

$$x^2 - 6x \quad \rightarrow \quad (x - 3)^2$$

3. Umocněním $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 3^2$ ale zjistíme, že nám - vám „přebývá 3^2 (B^2). Aby rovnost platila, je vždy nutné **odečíst** B^2 .

$$[x^2 - 6x] = (x - 3)^2 - 3^2$$

$$2[x^2 - 6x] + 7 = 2[(x-3)^2 - 3^2] + 7 = 2[(x-3)^2 - 9] + 7$$

4. Odstraníme hranatou závorku a sečteme

$$2[(x-3)^2 - 9] + 7 = 2(x-3)^2 - 18 + 7 = 2(x-3)^2 - 11$$

5. A můžeme s klidným srdcem psát

$$f: y = 2x^2 - 12x + 7 = 2(x-3)^2 - 11$$

6. Z funkčního předpisu snadno odečteme souřadnice vrcholu paraboly

$$f: y = 2(x-3)^2 - 11 \quad \rightarrow \quad V[3; -11]$$

7. Z funkčního předpisu snadno odečteme strmost a orientaci paraboly

$$f: y = 2x^2 - 12x + 7 = 2(x-3)^2 - 11$$

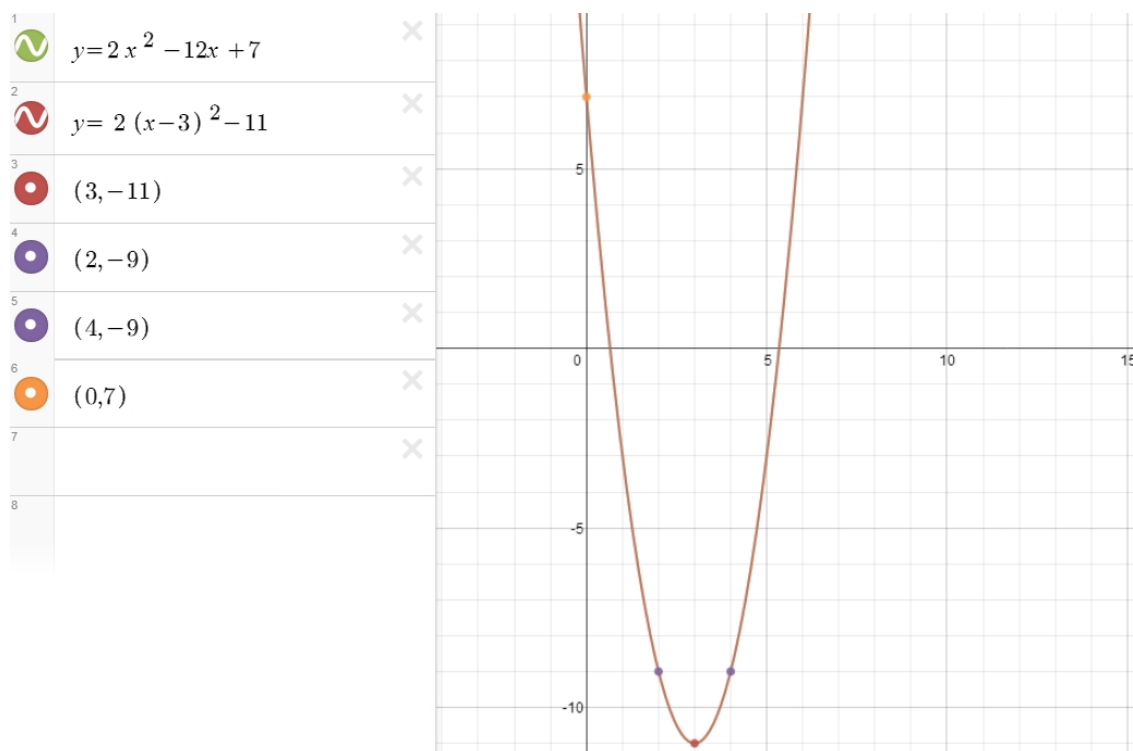
$$|2| > 1 \quad \rightarrow \quad \text{strmější } [2, -9]; [4, -9]$$

$$2 > 0 \quad \rightarrow \quad \text{vrchol dole}$$

8. Z funkčního předpisu snadno odečteme průsečík paraboly s osou y

$$f: y = 2x^2 - 12x + 7 = 2(x-3)^2 - 11$$

$$f: y = 2x^2 - 12x + 7 = 2(x-3)^2 - 11$$



Obr. 9

Příklad 3

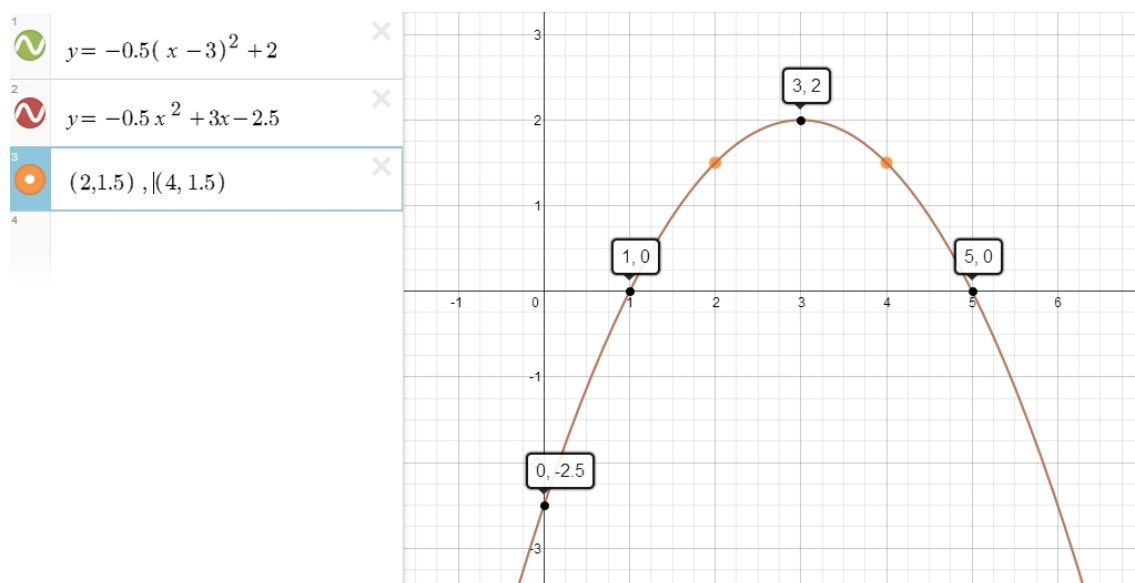
Načrtněte graf funkce $f: y = -0,5x^2 + 3x - 2,5$

$$\begin{aligned} f: y &= -0,5x^2 + 3x - 2,5 = \\ &= -0,5 [x^2 - 6x] - 2,5 = \\ &= -0,5 [(x - 3)^2 - 9] - 2,5 = \\ &= -0,5 (x - 3)^2 + 4,5 - 2,5 = \\ &= -0,5 (x - 3)^2 + 2 \end{aligned}$$

V[3;2]

[0; -2,5]

vrchol nahoře, „otevřenější“ [2; 1,5] a [4; 1,5]



Obr. 10

Průsečíky s osami

Pro popis funkce, práci s funkcí a jejím grafem je důležité dokázat určit průsečíky s osami. Tak jako je přímka (lineární útvar - prvního stupně) jednoznačně určena dvěma body, je parabola (kvadratický útvar - druhého stupně) určena alespoň **třemi** body.

- Průsečík s osou o_y lze snadno vyčíst z funkčního předpisu ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$ jak je ukázáno v předchozím. Odpovídá koeficientu c .
- Průsečík s osou o_x vždy snadno určit nelze. Pro některé případy - a ty bychom měli být schopni orientačně určit - stačí vyjít ze základních vlastností průběhu. Jak určit průsečíky s osou x obecně si ukážeme při řešení kvadratických rovnic.

SbírkaNačrtněte grafy kvadratických funkcí²

a: $y = x^2 - 3$

b: $y = (x - 3)^2$

c: $y = -3x^2$

d: $y = -\frac{1}{3}x^2$

e: $y = x^2 - 3x$

f: $y = x^2 + 3$

g: $y = (x + 3)^2$

h: $y = 3x^2$

i: $y = \frac{1}{3}x^2$

j: $y = x^2 + 3x$

k: $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$

l: $y = 3(x + 3)^2 - 3$

o: $y = x^2 - 2x - 3$

p: $y = x^2 + 2x - 3$

m: $y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 3$

n: $y = -3x^2 + 6x + 3$

q: $y = x^2 - 2x - 3$

r: $y = -x^2 + 2x + 3$

s: $y = (x - 2)^2 - 9$

t: $y = -(x + 3)^2 + 4$

u: $y = 0,5(x - 2)^2 - 8$

v: $y = -2(x - 3)^2 + 8$

w: $y = -x^2 - 6x$

x: $y = x^2 - 4x - 5$

y: $y = -2x^2 + 12x - 10$

z: $y = 0,5x^2 - 2x - 6$

2 K ověření správnosti svého řešení použijte webovou aplikaci www.desmos.com

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Webová aplikace <https://www.desmos.com/calculator>

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Kvadratická funkce
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_31
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	06. 03. 2014
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní listy s výkladem, s řešenými modelovými příklady, se zadáním a řešením příkladů k procvičení grafů kvadratických funkcí.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	