Střední škola podnikání

Vysoké Mýto

Malá škola - velká rodina

Funkce, rovnice a jejich užití

Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_30

27. 02. 2014

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list se zadáním a řešením jednotlivých typů rovnic a nerovnic.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Pro řešení těchto úloh, řešení rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou a úpravu výrazů s absolutní hodnotou lze samozřejmě využít i definici absolutní hodnoty tak, jak jsme si to ukázali v předchozím roce .

Jelikož úvahy a zápisy při odstraňování absolutních hodnot mohou být zdlouhavé a nepřehledné, požívá se pro řešení několik mechanismů, které z řešení takových rovnic rutinní věc. My si jeden tríček ukážeme.

Příklad 1

Řešte rovnici $|x| = 3$

Podle definice mohou nastat za určitých podmínek dvě možnosti:

Jestliže $x < 0$, pak $|x| = -x$ a tedy $-x = 3$, nebo, jestliže $x \geqq 0$, pak $|x| = x$ a tedy $x = 3$.

Celou situaci si znázorníme na číselné ose. Bod, pro který je výraz v absolutní hodnotě roven nule (**nulový bod**), dělí osu na dva intervaly. **Vlevo** od *nulového bodu* výraz v absolutní hodnotě přepíšeme **s opačnými znaménky** (opačný výraz), **vpravo** od *nulového bodu* výraz v absolutní hodnotě přepíšeme **se stejnými znaménky**. Tak jsme jedinou rovnici s absolutní hodnotou převedli va dvě rovnice bez absolutní hodnoty v daných intervalech řešení. Této metodě budeme říkat **metoda nulových bodů**.

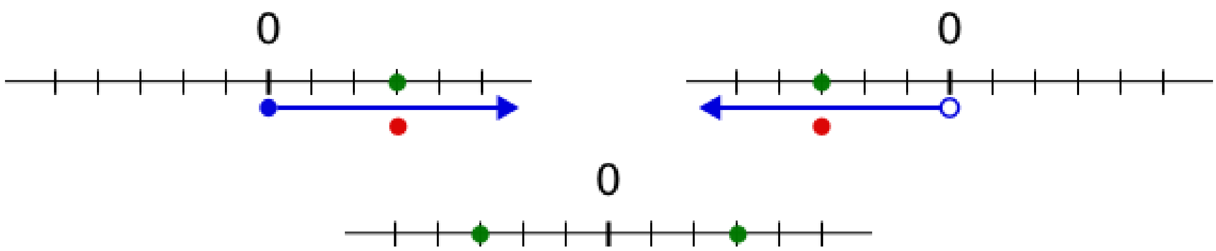
Pořád se sice jedná o využití definice absolutní hodnoty, mechanismus řešení je však snazší, přehlednější a rychlejší.

Řešení důsledným užitím definice

$|x| = 3$

$(x \geqq 0 \wedge x = 3) \quad \vee \quad (x < 0 \wedge -x = 3)$

$\langle 0; \infty) \cap \{3\} \quad \cup \quad (-\infty; 0) \cap \{-3\}$

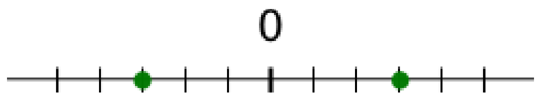


$x \in \{-3; 3\}$

Řešení *metodou nulových bodů*

$|x| = 3$

nulový bod (NB): 0



$-x = 3$ $x = 3$

$x \in \{-3; 3\}$

Příklad 2

Řešte rovnici $|x + 1| = 3$

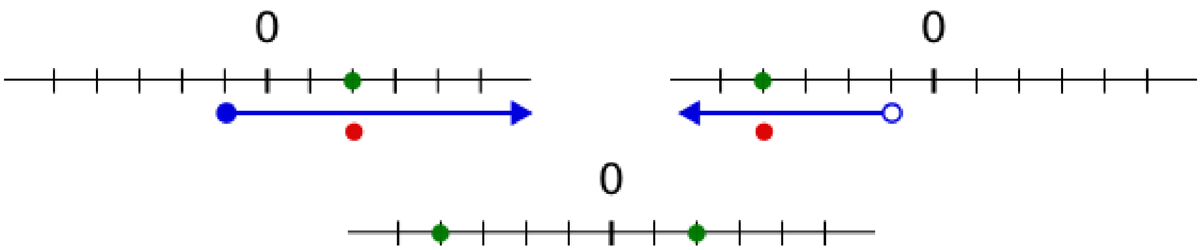
Řešení důsledným užitím definice

Jestliže $x+1 \geqq 0$, pak $|x+1|= x+1$ a tedy $x+1 = 3$, nebo, jestliže $x+1 < 0$, pak $|x+1|= -(x+1)$ a tedy
$-(x+1) = 3$.

$$(x+1 \geqq 0 \ \wedge \ x+1 = 3) \quad \vee \quad (x+1 < 0 \ \wedge \ -(x+1) = 3)$$

$$(x \geqq -1 \ \wedge \ x = 2) \quad \vee \quad (x < -1 \ \wedge \ x = -4)$$

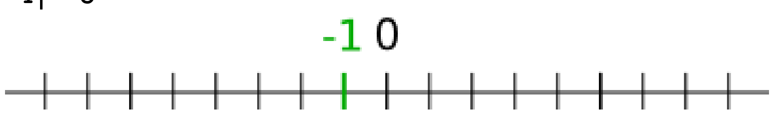
$$\langle -1; \infty) \cap \{2\} \quad \cup \quad (-\infty; -1) \cap \{-4\}$$



$x \in \{-4; 2\}$

Řešení *metodou nulových bodů*

Řešte rovnici $|x + 1| = 3$
NB: -1



$-x - 1 = 3$ $x + 1 = 3$

$x = -4$ $x = 2$

$x \in \{-4; 2\}$

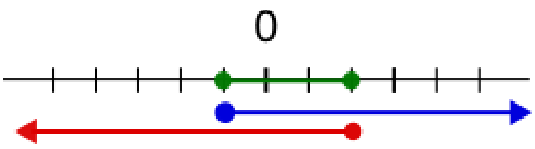
Příklad 3

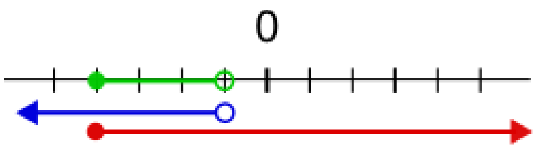
Řešte rovnici $|x + 1| \leqq 3$

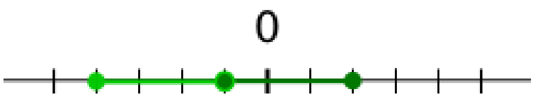
Řešení důsledným užitím definice

Jestliže $x+1 \geqq 0$, pak $|x+1| = x+1$ a tedy $x+1 \leqq 3$, nebo, jestliže $x+1 < 0$, pak $|x+1| = -(x+1)$ a tedy
$-(x+1) \leqq 3$.

$$(x+1 \geqq 0 \ \wedge \ x+1 \leqq 3) \quad \vee \quad (x+1 < 0 \ \wedge \ -(x+1) \leqq 3)$$
$$(x \geqq -1 \ \wedge \ x \leqq 2) \quad \vee \quad (x < -1 \ \wedge \ x \geqq -4)$$
$$\langle -1; \infty) \cap (-\infty; 2\rangle \quad \cup \quad (-\infty; -1) \cap \langle -4; \infty)$$





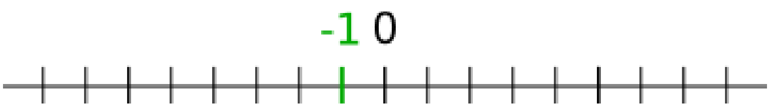


$x \in \langle -4; 2\rangle$

Řešení *metodou nulových bodů*

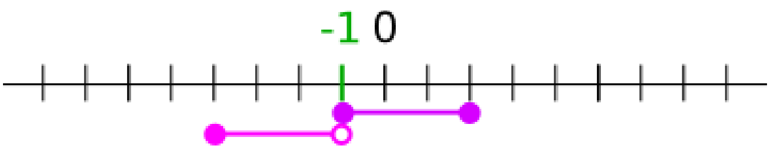
Řešte rovnici $|x + 1| \leqq 3$

NB: –1



$-x - 1 \leqq 3$ $\quad$ $x + 1 \leqq 3$

$x \geqq -4$ $\quad$ $x \leqq 2$



$x \in \langle -4; 2\rangle$

Příklad 4

Řešte rovnici $|x + 1| > 3$

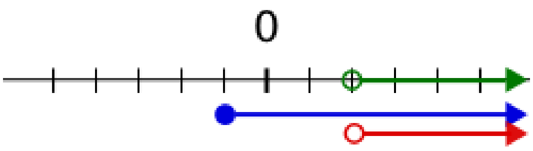
Řešení důsledným užitím definice

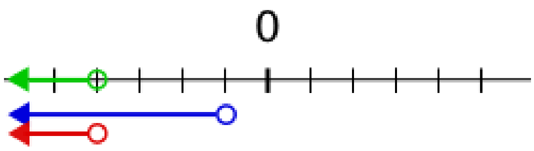
Jestliže $x+1 \geqq 0$, pak $|x+1|= x+1$ a tedy $x+1 > 3$, nebo, jestliže $x+1 < 0$, pak $|x+1|= -(x+1)$ a tedy
$-(x+1) > 3$.

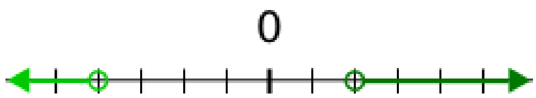
$$(x+1 \geqq 0 \ \wedge\ x+1 > 3) \quad \vee \quad (x+1 < 0 \ \wedge\ -(x+1) > 3)$$

$$(x \geqq -1 \ \wedge\ x > 2) \quad \vee \quad (x < -1 \ \wedge\ x < -4)$$

$$\langle -1;\ \infty) \ \cap\ (2;\ \infty) \quad \cup \quad (-\infty;\ -1) \ \cap\ (-\infty;\ -4)$$



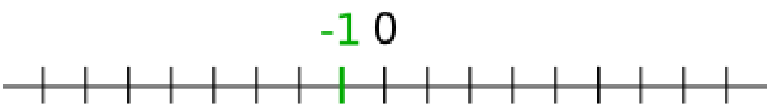




$x \in (-\infty;\ -4) \cup (2;\ \infty)$

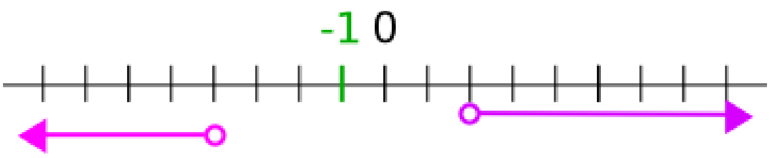
Řešení *metodou nulových bodů*

NB: –1



$-x - 1 > 3$ $\quad$ $x + 1 > 3$

$x < -4$ $\quad$ $x > 2$



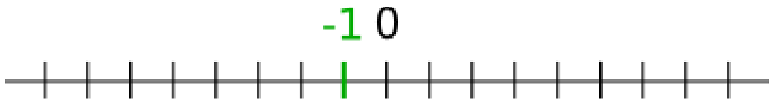
$x \in (-\infty;\ -4) \cup (2;\ \infty)$

Příklad 5

Řešte rovnici $|x + 1| > -3$

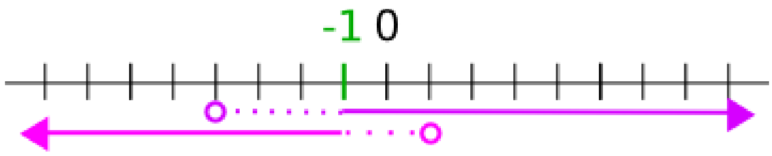
Řešení *metodou nulových bodů*

NB: −1



$-x - 1 > -3$ $\qquad$ $x + 1 > -3$

$x < 2$ $\qquad$ $x > -4$



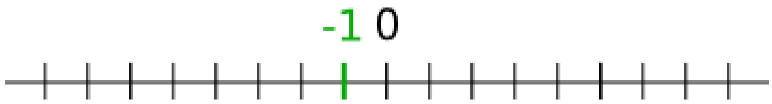
$x \in (-\infty;\ \infty)$

Příklad 6

Řešte rovnici $|x + 1| \leqq -3$

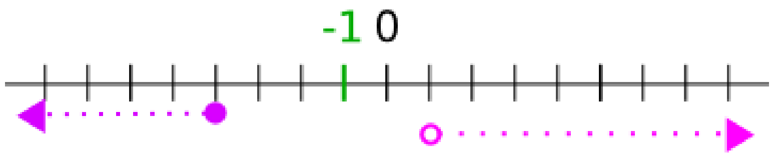
Řešení *metodou nulových bodů*

NB: −1



$-x - 1 \leqq -3$ $\qquad$ $x + 1 \leqq -3$

$x \geqq 2$ $\qquad$ $x \leqq -4$



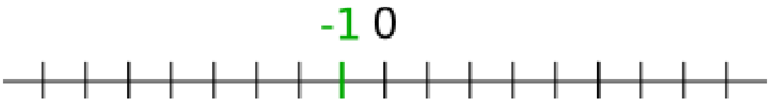
$x \in \varnothing$

Příklad 7

Řešte rovnici $|x + 1| > 3x$

Řešení *metodou nulových bodů*

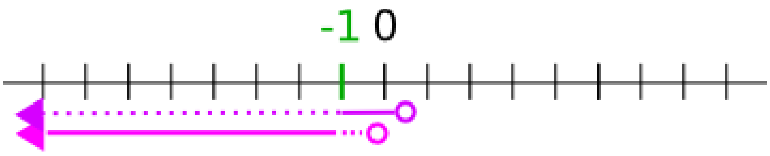
NB: -1



$-x - 1 > 3x$ | $x + 1 > 3x$

$4x < -1$ | $2x < 1$

$x < -0{,}25$ | $x < 0{,}5$



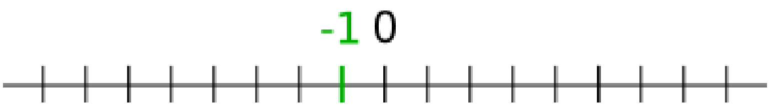
$x \in (-\infty;\ 0{,}5)$

Příklad 8

Řešte rovnici $|x + 1| \leqq x - 3$

Řešení *metodou nulových bodů*

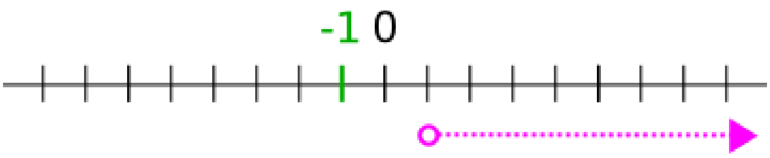
NB: -1



$-x - 1 \leqq x - 3$ | $x + 1 \leqq x - 3$

$2x \geqq 2$ | $1 \leqq -3$

$x \geqq 1$ | $x \in \emptyset$



$x \in \emptyset$

Cvičení

Řešte rovnice a nerovnice metodou nulových bodů

a) $|x - 3| \geq 4x$

b) $|x - 2| \leq 3$

c) $|2x - 6| \leq -3$

d) $|2 - x| > 5$

e) $|x + 2| < -3$

f) $|x - 2| = x - 2$

g) $|2x + 6| = 3 - x$

h) $|2x + 6| > 3$

i) $|2x - 6| \leq 3$

j) $|2x - 6| = x - 3$

Řešení

k) $(-\infty; 0{,}6)$
l) $\langle -1; 5\rangle$
m) $\emptyset$
n) $|2 - x| > 5$
o) $\emptyset$
p) $\langle 2; \infty)$
q) $\{-9; -1\}$
r) $(-\infty; -4{,}5) \cup (-1{,}5; \infty)$
s) $\langle 1{,}5; 4{,}5\rangle$
t) $\{3\}$

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_30
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	27. 02. 2014
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list se zadáním a řešením jednotlivých typů rovnic a nerovnic.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	