Funkce, rovnice a jejich užití

Funkce absolutní hodnota

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_19

10.10. 2013

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní listy s výkladem, s řešenými modelovými příklady, se zadáním a řešením příkladů k procvičení.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Funkce absolutní hodnota

S pojmem *absolutní hodnota* jsme se již setkali v předchozím studiu. Připomeňme si alespoň základní poznatky a přístupy.

- **Definice absolutní hodnoty**

  $|a|=a \Leftrightarrow a \geq 0$

  $|a|=-a \Leftrightarrow a<0$

- **Absolutní hodnota jako *vzdálenost* na číselné ose**

  $|x-x_0|=c$ „Vzdálenost čísla x od čísla x_o je c (jednotek)."

Absolutní hodnotu ale můžeme chápat i jako funkci; to znamená, ji lze zadat funkčním předpisem, grafem a tabulkou.

Jednoduchou funkci absolutní hodnota lze zapsat předpisem :

$$f: y=a|x-x_0|+b$$

kde a, b, x_0 jsou reálná čísla a $a \neq 0$.

Graf

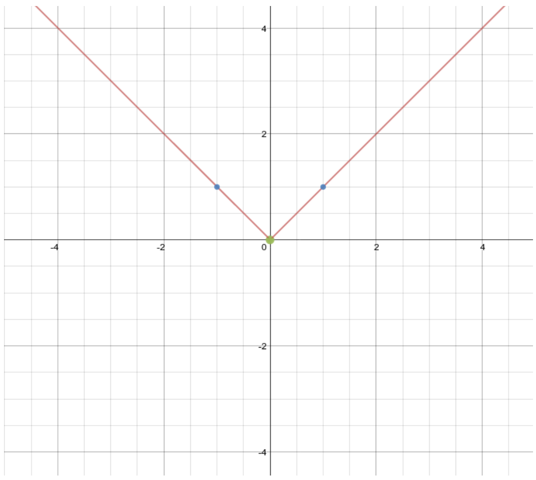
Graf jednoduché funkce absolutní hodnota je typický a má tvar písmena V. Graf má jeden význačný bod – **vrchol**, ve kterém má minimum nebo maximum.

Elementární[1] funkce

$f: y=|x| \qquad kde: a=1; x_0=0; b=0$

Graf	*základní „vé"*
souřadnice vrcholu	V[0;0]
význačné body	[1;1] [–1;1]
„vé"	*osově souměrná podle o_y*

ramena svírají s osou o_x úhel 45°



Obr. 1: Elementární funkce absolutní hodnota

1 Elementární neboli základní, ta nejjednodušší z daných funkcí

Vlastnosti elementární funkce absolutní hodnota

1. $D(f)=R$
   $H(f)=\langle 0\,;\infty\rangle$
2. Není monotónní
3. Je zdola omezená
4. Je sudá
5. Není prostá
6. Je spojitá
7. Má minimum 0 v bodě 0 (vrchol)

Tabulka funkčních hodnot pro některé body elementární kvadratické funkce

					V									
x	-3	–2	–1	–0,5	0	0,1	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6
y	3	2	1	0,5	0	0,1	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6

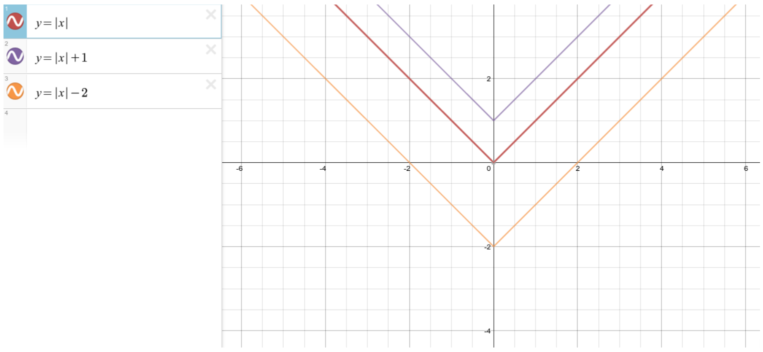
Práce s grafem

Vždy vyjdeme ze tvaru a umístění *základní paraboly*.

- **Posun ve směru osy y**

  $y = |x| + b$

  V [0;**b**]

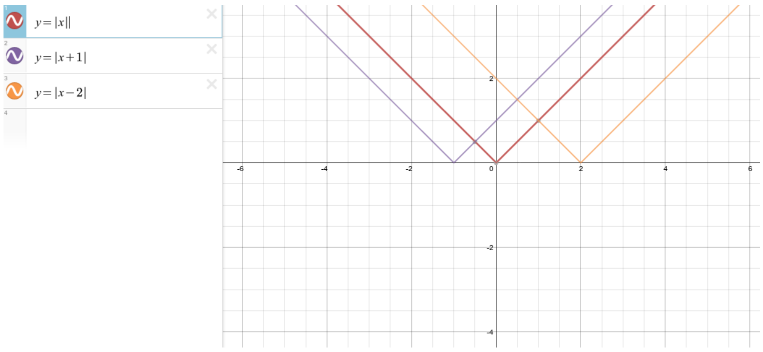


Obr. 2

- **Posun ve směru osy x**

  $y = |x - x_0|$

  V [-**x**$_0$;0]

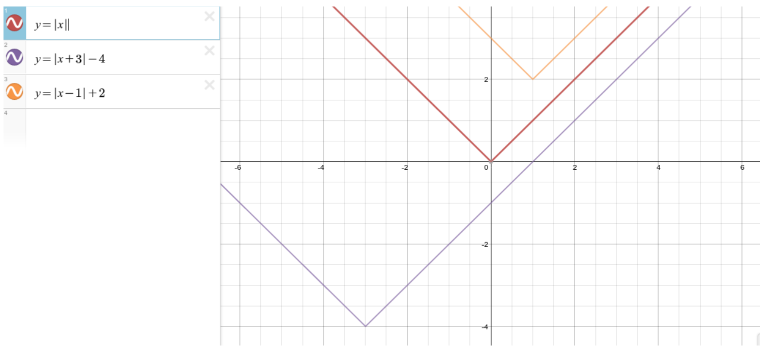


Obr. 3

- **Posun ve směru os x, y**

  $y = |x - x_0| + b$

  V [-**x**$_0$;**b**]



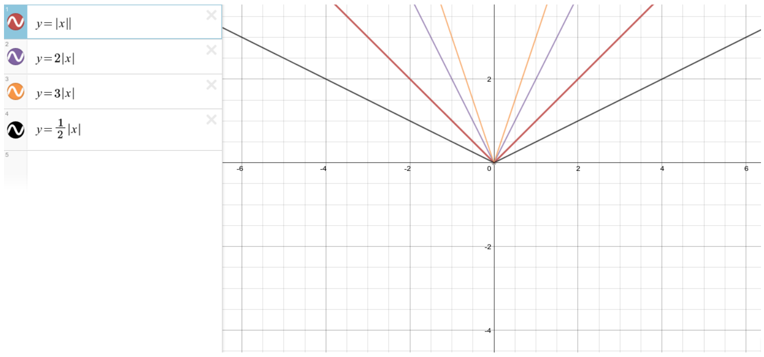
Obr. 4

- **Změna „tvaru“**

  $y = a|x|$

  |a| … strmost

  V [0;0]



Obr. 5

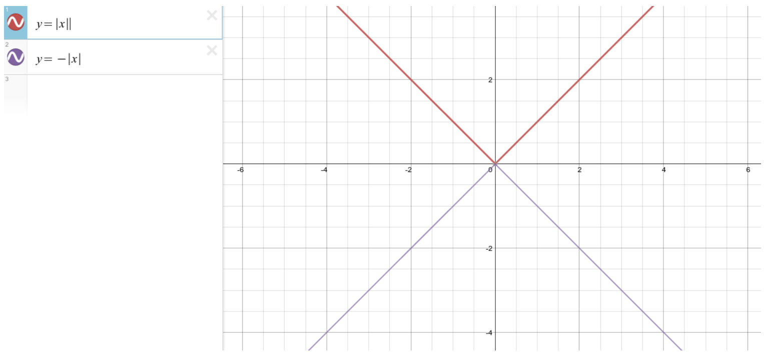
- **Změna „orientace“**

  $y = -|x|$

  a > 0 … V dole

  a < 0 … V nahoře

  V [0;0]



Obr. 6

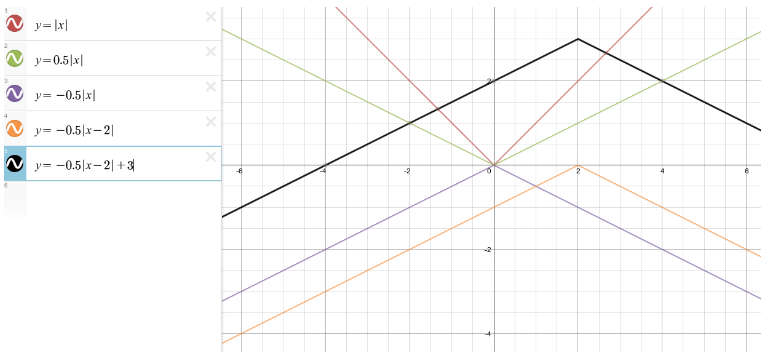
- **Všecko postupně najednou**

  Načrtněte graf fce

  $y = -0{,}5|x-2|+3$

  Sledujte sled

  $y = |x|$
  $y = 0{,}5|x|$
  $y = -0{,}5|x|$
  $y = -0{,}5|x-2|$
  $y = -0{,}5|x-2|+3$



Průsečíky s osami

Pro popis funkce, práci s funkcí a jejím grafem je důležité dokázat určit průsečíky s osami. Přímka (lineární útvar – prvního stupně) je jednoznačně určena **dvěma** body. Graf tvoří dvě polopřímky.

- Z funkčního předpisu ve tvaru $f: y = a|x - x_0| + b$ snadno určíme souřadnice vrcholu (jeden bod společný pro obě polopřímky).
  V $[x_0; b]$
- Z funkčního předpisu ve tvaru $f: y = a|x - x_0| + b$ snadno určíme růst (klesání) polopřímek grafu. Koeficient *a* udává, kolikrát větší (menší) je změna ve směru osy o_y než ve směru osy o_x
  - **|a| > 1** změna ve směru osy o_y **větší** – strmější **Δy**
  - **|a| < 1** změna ve směru osy o_y **menší** – pozvolnější **Δx**
  - **a > 0** vrchol **dole**
  - **a < 0** vrchol **nahoře**

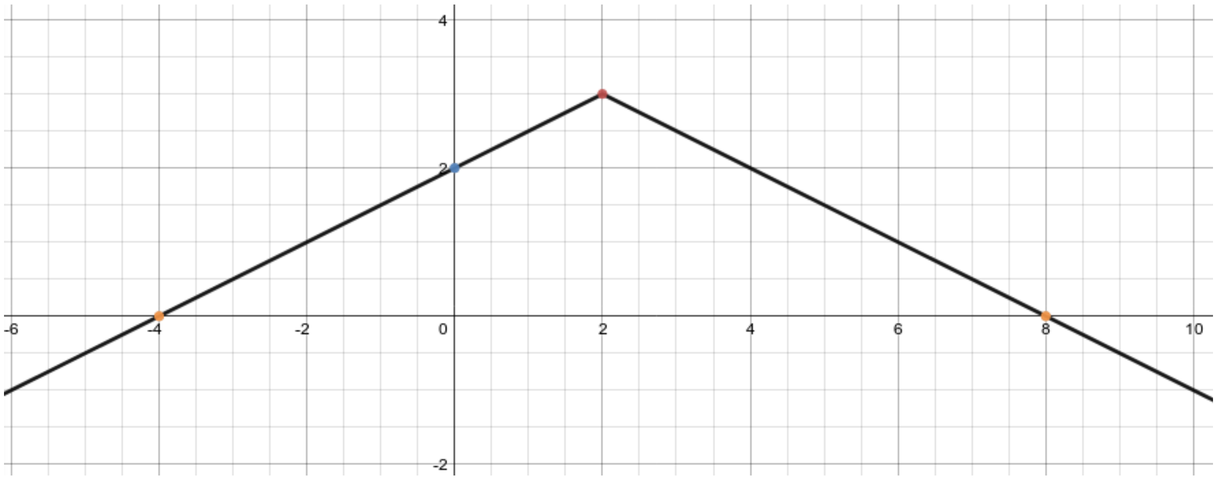
- Průsečík s osou o_y: Y [0; $\mathbf{v_y} \pm \mathbf{\Delta y}$]

- Průsečíky s osou o_x: X_1[$\mathbf{v_x} + \mathbf{\Delta x}$;0]
  X_2[$\mathbf{v_x} - \mathbf{\Delta x}$;0]

Příklad 1

Načrtněte graf funkce zadané předpisem $y = -0{,}5|x - 2| + 3$ a určete průsečíky grafu s osami.

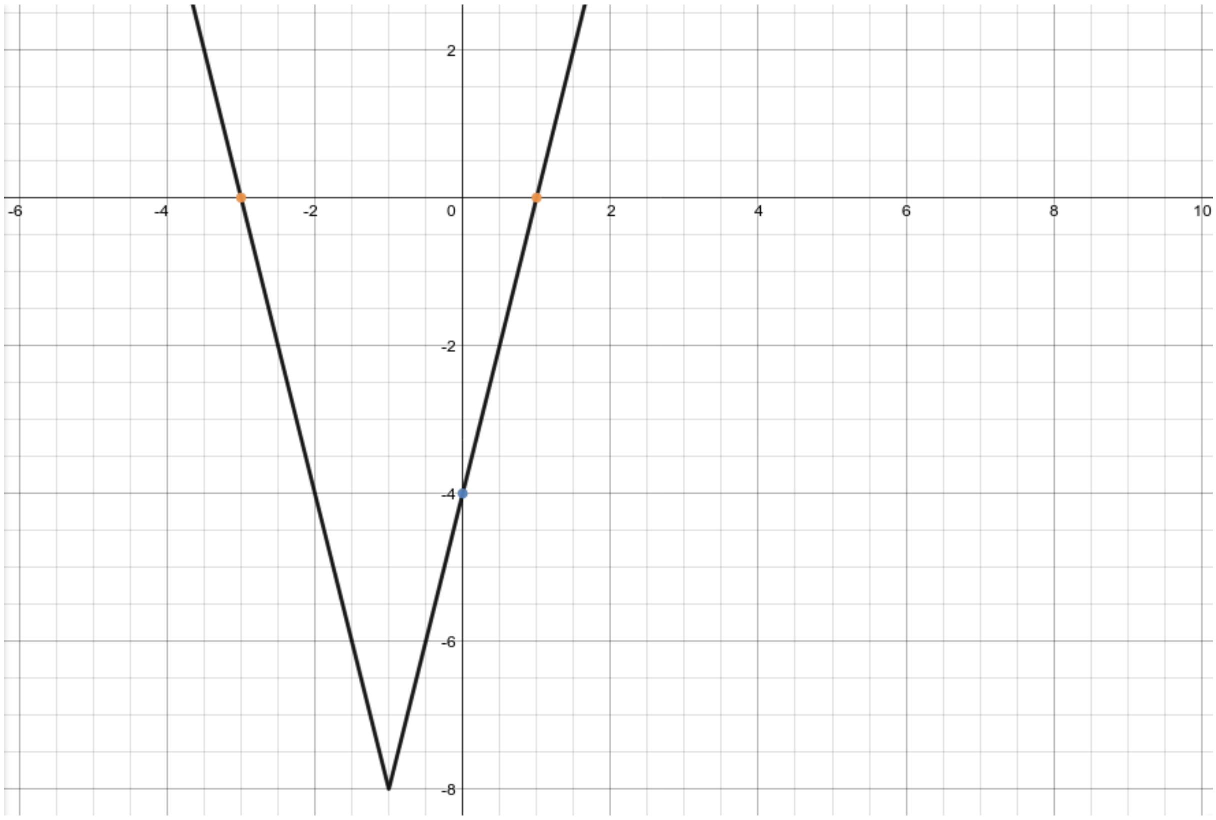
1. V [2;3]
   - od vrcholu k o_x → 2
   - od vrcholu k o_y → 3
2. –0,5 < 0 → vrchol nahoře
3. |–0,5| < 1 → pozvolnější
   - Y:
     - Δx = 2 → Δy = 2 · 0,5 = 1 → 3 – 1 = 2 → **Y[0;2]**
   - X:
     - Δy = 3 → Δx = 3 : 0,5 = 6 → 2 + 6 = 8 → **X_1[8;0]**
     - → 2 - 6 = -4 → **X_2[-4;0]**



Příklad 2

Načrtněte graf funkce zadané předpisem $y=4|x+1|-8$ a určete průsečíky grafu s osami.

- V [–1;–8]
- 3 → vrchol dole ; strmější
  - Y [0 ; –8 + (1 · 4)] → **Y[0;–4]**
  - X_1 [–1 – (8 : 4) ; 0] → **X_1[-3;0]**
    X_2 [–1 + (8 : 4) ; 0] → **X_2[1;0]**



Sbírka

Načrtněte grafy funkcí s absolutní hodnotou[2]

a: $y=|x|-3$

b: $y=|x-3|$

c: $y=-3|x|$

d: $y=-\frac{1}{3}|x|$

e: $y=|x|+3$

f: $y=|x+3|$

g: $y=3|x|$

h: $y=\frac{1}{3}|x|$

i: $y=-\frac{1}{3}x^2+3$

j: $y=3x+32-3$

k: $y=-\frac{1}{3}|x-3|+3$

l: $y=-3|x|+3$

m: $y=-2|x|-3$

n: $y=2|x|+3$

o: $y=|x|-2$

p: $y=-|x|+2$

q: $y=|x-2|-9$

r: $y=-|x+3|+4$

s: $y=0{,}5|x-2|-8$

t: $y=-2|x-3|+8$

u: $y=-|x|-6$

v: $y=-|x-6|$

w: $y=-2|x+12|-10$

x: $y=-0{,}5|x+2|-6$

2 K ověření správnosti svého řešení použijte webovou aplikaci www.desmos.com

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Webová aplikace https://www.desmos.com/calculator

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Funkce absolutní hodnota
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_19
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	10.10. 2013
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní listy s výkladem, s řešenými modelovými příklady, se zadáním a řešením příkladů k procvičení.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	