



Funkce, rovnice a jejich užití

Exponenciální a logaritmické rovnice

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_15

14. 06. 2013

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list s vysvětlením základních typů řešení exponenciálních a logaritmických rovnic, s příklady a řešením.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Exponenciální a logaritmické rovnice

Doposud jsme rovnice (lineární, kvadratické apod.) řešili pomocí ekvivalentních úprav¹, k řešení iracionálních rovnic (např. rovnic s odmocninami) se užívá důsledková neekvivalentní úprava „umocnění“², k řešení rovnic vyšších řádů (např. rovnic čtvrtého stupně) se užívá důsledková neekvivalentní úprava „odmocnění“³.

Při řešení exponenciálních a logaritmických rovnic se často využívá **analogie** - z exponenciální (resp. logaritmické) rovnice přejdeme k rovnici např. lineární. Další novinkou je i **substituce** (nahrazení) - komplikovaný výraz nahradíme jednodušším, což nám usnadní práci.

K řešení exponenciálních a logaritmických rovnic lze využít hned několik různých přístupů, různých metod; jednotlivé typy probereme od těch jednodušších.

Příklad 1

rovnost mocnin se stejným základem

Řešte v R $5^{x+1} = 5^3$.

Jelikož se rovnají mocniny se **stejným** základem (5), musí se rovnat i exponenty. Z exponenciální rovnice $5^{x+1} = 5^3$ pomocí analogie můžeme přejít k lineární rovnici $x+1=3$

$$5^{x+1} = 5^3$$

$$x+1=3$$

$$x=2$$

Příklad 2

rovnost logaritmů se stejným základem

Řešte v R $\log_5(x+1) = \log_5 3$.

Jelikož se rovnají logaritmy se **stejným** základem (5), musí se rovnat i logaritmované výrazy. Z logaritmické rovnice $\log_5(x+1) = \log_5 3$ pomocí analogie můžeme přejít k lineární rovnici $x+1=3$

$$\log_5(x+1) = \log_5 3$$

$$x+1=3$$

$$x=2$$

1 Ekvivalentní úpravy (tj. upravená rovnice má stejné kořeny jako rovnice původní) jsou tři:

- Strany rovnice lze vzájemně zaměnit
- K oběma stranám rovnice přičteme stejný výraz
- Obě strany rovnice vynásobíme stejným nenulovým výrazem

2 Důsledkem **umocnění** obou stran původní rovnice je nová rovnice, která má i takové kořeny, které nejsou kořeny rovnice původní. Proto je po použití takové neekvivalentní úpravy všechny kořeny prověřit (např. zkouškou).

3 Důsledkem **odmocnění** obou stran původní rovnice je nová rovnice, která nemá všechny kořeny, které jsou kořeny rovnice původní. Tato úprava se používá ke zjištění alespoň některých kořenů rovnice a k následnému snížení stupně pomocí rozkladu na kořenové činitele.

Příklad 3logaritmování⁴Řešte v R $5^{x+1} = 2^3$.Protože nelze výrazy upravit na mocniny o stejném základu, celou rovnici následně **logaritmuje**me.

$$5^{x+1} = 2^3$$

$$5^{x+1} = 8$$

$$x+1 = \log_5 8$$

$$x+1 = \log_5 8 - 1$$

$$x = 0,29203$$

Příklad 4odlogaritmování⁴Řešte v R $\log_5(x+1) = 3$.

$$\log_5(x+1) = 3$$

$$x+1 = 5^3$$

$$x = 125 - 1$$

$$x = 124$$

Při řešení exponenciálních a logaritmických rovnic je často třeba výrazy na obou stranách nejprve upravit. K tomu využíváme nejen ekvivalentní úpravy (ty se ale brzy ukáží jako ne zcela ekvivalentní), ale i *věty o logaritmech*⁵ a základní vlastnosti logaritmů⁶ a mocnin⁷.

Zpravidla „do Říma⁸“ nevede jen jedna cesta. Nápadů a cestiček (lidově chybně nazývaných *postupy*) často můžeme volit hned celou přehršel. Ze zřejmých důvodů se tedy omezíme **pouze** na omezený počet možností. Proto Vás při procházení následujících modelových příkladů jistě nejednou napadne jiný krok - a to může být správný krok!

4 Logaritmování a odlogaritmování

$$a^E = M \quad \Leftrightarrow \quad \log_a M = E$$

5 Věty o logaritmech

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \dots\dots\dots V$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \dots\dots\dots VI$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad \dots\dots\dots VII$$

6 $\log_a a = 1$ $\dots\dots\dots II$

$$\log_a 1 = 0 \quad \dots\dots\dots$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \dots\dots\dots IV$$

7 $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $\dots\dots\dots VIII$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad \dots\dots\dots IX$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} \quad \dots\dots\dots X$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \dots\dots\dots XI$$

8 Velice vtipný odkaz na známé úsloví *Všechny cesty vedou do Říma*.

Příklad 5

Řešte v R $\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4$.

Strategie A. Všechny logaritmy jsou dekadické; výrazy s logaritmy převedeme na jednu stranu rovnice (součty a rozdíly) a pomocí vět o logaritmech převedeme na jediný logaritmus; odlogaritmováním přejdeme k jinému typu rovnice.

$$\begin{aligned} \log(x+2) - \log(x-1) &= 2 - \log 4 \\ \log 4 + \log(x+2) - \log(x-1) &= 2 \\ \log \frac{4 \cdot (x+2)}{(x-1)} &= 2 \quad \text{odlogaritmujeme} \\ \frac{4 \cdot (x+2)}{(x-1)} &= 10^2 \\ 4 \cdot (x+2) &= 100 \cdot (x-1) \\ (x+2) &= 25 \cdot (x-1) \\ x+2 &= 25x - 25 \\ 27 &= 24x \\ 8x &= 9 \\ x &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Strategie B. Výrazy s logaritmy (zvláště výrazy s neznámou x a číselné výrazy) se pokusíme zjednodušit a využijeme rovnost logaritmů se stejným základem.

$\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4$		<i>Zkouška</i>
$\log(x+2) - \log(x-1) = 2 \cdot \log 10 - \log 4$	II	$\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4$
$\log(x+2) - \log(x-1) = \log 10^2 - \log 4$	VII	$x = \frac{9}{8}$
$\log(x+2) - \log(x-1) = \log 100 - \log 4$		
$\log \frac{(x+2)}{(x-1)} = \log \frac{100}{4}$	VI	$L = \log\left(\frac{9}{8} + 2\right) - \log\left(\frac{9}{8} - 1\right) = 1,39794$
$\log \frac{(x+2)}{(x-1)} = \log 25$		$P = 2 - \log 4 = 1,39794$
$\frac{(x+2)}{(x-1)} = 25$		$L = P \Rightarrow x = \frac{9}{8}$
$x+2 = 25 \cdot (x-1)$		
$x+2 = 25x - 25$		
$24x = 27$		
$x = \frac{9}{8}$		

Zkouška jako součást řešení

Jistě jste si povšimli, že jsme doposud až trochu lehkovážně předpokládali existenci výrazů s logaritmy a lomených výrazů bez jakýchkoli omezení. To samozřejmě není možné; logaritmus je definován pouze pro výrazy nabývající kladné hodnoty a nulovým výrazem také není možné dělit. Jelikož našim cílem je určení kořenů původní rovnice, můžeme si práci usnadnit: kořeny zpětně dosadíme do původní rovnice a ověříme pro ně rovnost, případně existenci původních výrazů. Kořeny, které nebudou vyhovovat původní rovnici z řešení vyloučíme - k řešení tedy připojíme **vždy zkoušku**.

Příklad 6**násobení a dělení**

Řešte v \mathcal{R} $2 \cdot \log_7(x-1) = 0,5(\log_7 x^5 - \log_7 x)$.

Řešení A

$$2 \cdot \log_7(x-1) = 0,5(\log_7 x^5 - \log_7 x) \quad \text{rovnici vynásobíme 2}$$

$$4 \cdot \log_7(x-1) = \log_7 x^5 - \log_7 x$$

$$4 \cdot \log_7(x-1) = \log_7 \frac{x^5}{x} \quad VI$$

$$\log_7(x-1)^4 = \log_7 x^4 \quad VII$$

$$(x-1)^4 = x^4 \quad \text{rovnice 4. stupně}$$

$$x_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}$$

Řešení B

$$2 \cdot \log_7(x-1) = 0,5(\log_7 x^5 - \log_7 x) \quad VI$$

$$2 \cdot \log_7(x-1) = 0,5 \cdot \log_7 \frac{x^5}{x}$$

$$2 \cdot \log_7(x-1) = 0,5 \cdot \log_7 x^4$$

$$\log_7(x-1)^2 = \log_7(x^4)^{0,5} \quad VII \quad \text{Zkouška}$$

$$(x-1)^2 = (x^4)^{0,5} \quad X \quad \text{pro } x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 2x + 1 = x^2$$

$$-2x + 1 = 0 \quad \text{lineární rovnice (1. stupně)} \quad L = 2 \cdot \log_7\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2 \cdot \log_7\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \quad x \in \emptyset$$

Řešení C

$$2 \cdot \log_7(x-1) = 0,5(\log_7 x^5 - \log_7 x) \quad VI$$

$$2 \cdot \log_7(x-1) = 0,5 \cdot \log_7 \frac{x^5}{x}$$

$$2 \cdot \log_7(x-1) = 0,5 \cdot \log_7 x^4$$

$$2 \cdot \log_7(x-1) = 2 \cdot \log_7 x \quad \text{rovnici vydělíme 2}$$

$$\log_7(x-1) = \log_7 x$$

$$x-1 = x$$

$$-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{nepravda}$$

$$x \in \emptyset$$

Jistě jste si povšimli podivné věci: Řešení rovnice se liší podle toho, jak jsme rovnici řešili. To však ale není možné! Příčinou je to, že ne všechny úpravy, které jsme prováděli, byly ekvivalentní. Hovoříme-li o logaritmech, jedním dechem jako bychom hovořili o exponentech - mocnících. Proto **vynásobení** logaritmické rovnice (Řešení A) je vlastně jako umocnění² a **dělení** rovnice (Řešení C) vyjde nastejno jako odmocnění³ - to je „nebezpečnější“, protože o některé kořeny přijdeme.

V předchozím jsme došli k tomu, že **zkouška je nutnou součástí řešení**. Řešení rovnice je tedy ve všech případech: $x \in \emptyset$.

Před použitím některého z předchozích „triků“ je často potřeba výrazy v rovnici vhodně upravit. Jak? - tak právě to je ta podivná matematika!

Příklad 6

úprava výrazů

$$\text{Řešte v } \mathcal{R} \quad \frac{1}{5^{3x-2}} = 125 \quad .$$

Strategie. Rovnici lze upravit tak, aby na obou stranách byly mocniny 5 (rovnost mocnin).

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{5^{3x-2}} = 125 & ZK \\ 5^{-3x+2} = 5^3 & L = \frac{1}{5^{3 \cdot (-\frac{1}{3}) - 2}} = 5^3 = 125 \\ -3x + 2 = 3 & P = 125 \\ x = \frac{-1}{3} & L = P \end{array}$$

Příklad 7

$$\text{Řešte v } \mathcal{R} \quad 3^{x+2} = 3^x + 2 \quad .$$

Strategie. Rovnici nelze upravit tak, aby na obou stranách byly mocniny stejného základu (rovnost mocnin). Rovnici upravíme tak, aby na levé straně byl jediný výraz s neznámou x a pravé straně byl číselný výraz. Logaritmováním rovnice vyjádříme neznámou.

$$\begin{array}{ll} 3^{x+2} = 3^x + 2 & \\ 3^x \cdot 3^2 = 3^x + 2 & \\ 9 \cdot 3^x - 3^x = 2 & ZK \\ 8 \cdot 3^x = 2 & L = 3^{-1,26186+2} = 2,25 \\ 3^x = \frac{1}{4} & P = 3^{-1,26186} + 2 = 2,25 \\ x = \log_3 \frac{1}{4} & L = P \\ x = -1,26186 & \end{array}$$

Příklad 8

$$\text{Řešte v } \mathcal{R} \quad \ln(x^2 - 19) = \ln(2x + 1) + \ln 5 \quad .$$

$$\begin{array}{ll} & ZK \\ & x = 12 \\ \ln(x^2 - 19) = \ln(2x + 1) + \ln 5 & L = \ln(12^2 - 19) = 4,82831 \\ \ln(x^2 - 19) = \ln((2x + 1) \cdot 5) & P = \ln(2 \cdot 12 + 1) + \ln 5 = 4,82831 \\ \ln(x^2 - 19) = \ln(10x + 5) & L = P \\ x^2 - 19 = 10x + 5 & x = 12 \quad (\text{je kořen}) \\ x^2 - 10x - 24 = 0 & \\ x_1 = 12 & x = -2 \\ x_2 = -2 & L = \ln((-2)^2 - 19) = \ln(-15) \quad \text{není definováno} \\ & P = \ln(2 \cdot (-2) + 1) + \ln 5 = \ln(-3) + \ln 5 \quad \text{není definováno} \\ & x \neq -2 \quad (\text{není kořen}) \end{array}$$

Příklad 9

Řešte v \mathcal{R} $\log_{0,5} x = \log_{0,5} 4 + \log_{0,5} \sqrt{7} - 0,5 \log_{0,5} 1$.

$$\log_{0,5} x = \log_{0,5} 4 + \log_{0,5} \sqrt{7} - 0,5 \log_{0,5} 1$$

$$\log_{0,5} x = \log_{0,5} 4 + \log_{0,5} \sqrt{7} - 0,5 \cdot 0$$

$$\log_{0,5} x = \log_{0,5} 4 + \log_{0,5} \sqrt{7}$$

$$\log_{0,5} x = \log_{0,5} (4 \cdot \sqrt{7})$$

$$x = 4 \cdot \sqrt{7}$$

ZK

$$\log_{0,5} 4 \cdot \sqrt{7} = -3,40368$$

$$\log_{0,5} 4 + \log_{0,5} \sqrt{7} - 0,5 \log_{0,5} 1 = -3,40368$$

Příklad 10

Řešte v \mathcal{R} $5^{3-x} = 3^{2x-1}$.

$$5^{3-x} = 3^{2x-1}$$

$$\frac{5^3}{5^x} = \frac{(3^2)^x}{3}$$

$$\frac{125}{5^x} = \frac{9^x}{3}$$

$$125 \cdot 3 = 9^x \cdot 5^x$$

$$45^x = 375$$

$$x = \log_{45} 375$$

$$x = \frac{\log 375}{\log 45} = 1,55699$$

ZK

$$L = 5^{3-1,55699} = 10,20052$$

$$P = 3^{2 \cdot 1,55699 - 1} = 10,20052$$

$$L = P$$

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Webová aplikace <https://www.desmos.com/calculator>

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Exponenciální a logaritmické rovnice
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_15
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	14. 06. 2013
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list s vysvětlením základních typů řešení exponenciálních a logaritmických rovnic, s příklady a řešením.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	