



Funkce, rovnice a jejich užití

Věty o logaritmech

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_13

06. 06. 2013

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list s vysvětlením a základních pojmů souvisejících s logaritmem, příklady a řešením.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

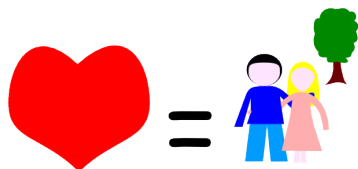
Věty o logaritmech

Některé vlastnosti logaritmů

- **Vztah mezi mocninou a logaritmem**

$$a^E = M \quad \Leftrightarrow \quad \log_a M = E \quad ^1$$

Pomoci může také poetická mnemotechnická hříčka²:



„Láska jsou dva na život (a na smrt).“



„Život je logaritmus lásky o základu dva.“

Hovoříme-li o logaritmech, hovoříme vlastně o exponentech (mocnidelích)!

- **Jiný způsob zápisu** (plyne z předchozího) I
 $a^{\log_a M} = M$
- **Základní vztahy** (viz graf logaritmické funkce nebo pojem logaritmu) II
 $\log_a a = 1$
 $\log_a 1 = 0$
- **Definiční obor logaritmů³** III
 $\log_a x \quad \text{kde } x \in (0; \infty)$
- **Změna základu** IV
 $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Tento vztah se často používá při výpočtech s kalkulačkou (pokud jsou na kalkulačce pouze dekadický a přirozený logaritmus).

$$\text{Např.: } \log_2 100 = \frac{\log 100}{\log 2} \quad \text{nebo} \quad \log_2 100 = \frac{\ln 100}{\ln 2}$$

1 Kde a je základ logaritmu, M je mocnina, E je exponent.

2 Použito v čtyřdílném seriálu ostravského studia ČST *Logaritmus lásky* z roku 1985

3 V matematice vesmíru známe pouze tři omezení (takový je vesmír):

- nelze dělit nulou
- nelze najít reálné sudé odmocniny záporných čísel
- neexistuje logaritmus záporného čísla a nuly

Věty o logaritmech⁴• **Logaritmus součinu**

V

Logaritmus součinu je roven součtu logaritmů.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_4 8 + \log_4 32 = \log_4(8 \cdot 32) = \log_4 256 = \log_4 4^5 = 5$$

• **Logaritmus podílu**

VI

Logaritmus podílu je roven rozdílu logaritmů.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \log_4 8 - \log_4 32 = \log_4 \frac{8}{32} = \log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{-1} = -1$$

• **Logaritmus mocniny**

VII

Logaritmus mocniny je roven součinu exponentu a logaritmu základu mocniny.

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$$

Příklad 1

Pomocí kalkulačky určete s přesností na pět desetinných míst

$\log 2 =$

$\ln 2 =$

$\log 20 =$

$\ln 20 =$

$\log 40 =$

$\ln 40 =$

$\log 200 =$

$\ln 200 =$

$\log \frac{1}{2} =$

$\ln \frac{1}{2} =$

$\log \frac{1}{20} =$

$\ln \frac{1}{20} =$

$\log \frac{1}{200} =$

$\ln \frac{1}{200} =$

$\log \frac{8}{5} =$

$\ln \frac{8}{5} =$

$\log \frac{5}{8} =$

$\ln \frac{5}{8} =$

Řešení:

0,30103; 1,30103; 1,60206; 2,30103; -0,30103; -1,30103; -2,30103; 0,20412; -0,20412;

0,69315; 2,99573; 3,68888; 5,29832; -0,69315; -2,99573; -5,29832; 0,47000; -0,47000;

4 Věty ponecháme bez důkazu; věty jsou obdobou již známých pravidel pro počítání s mocninami

• $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

• $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

• $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

Příklad 2

Pomocí kalkulačky (a vztahu IV) určete s přesností na pět desetinných míst

$$\log_2 100 =$$

$$\log_3 100 =$$

$$\log_4 100 =$$

$$\log_5 100 =$$

$$\log_2 3 =$$

$$\log_6 9 =$$

$$\log_4 11 =$$

$$\log_8 2 =$$

$$\log_2 5 =$$

$$\log_{\pi} e =$$

Řešení:

$$\log_2 100 = \frac{\log 100}{\log 2} = \frac{2}{0,30103} = 6,64386 \quad \text{nebo} \quad \log_2 100 = \frac{\ln 100}{\ln 2} = \frac{4,60517}{0,69314} = 6,64386$$

6,64385; 4,19181; 3,32193; 2,86135; 1,58496; 1,22629; 1,72972; 0,33333; 2,32193; 0,87357

Příklad 3

Vypočítejte

$$4 \cdot \log_6 3 + 5 \cdot \log_6 2 - \log_6 12 =$$

$$\log_{0,5} 6 + \log_{0,5} \frac{4}{6} =$$

$$\log 20 + \log 50 =$$

$$\log_{0,1} 20 + \log_{0,1} 0,2 =$$

$$\log_3 7 + \log_3 \frac{81}{7} =$$

$$\log_5 50 + \log_5 2 =$$

$$\log_4 4^{-0,5} =$$

$$\log_3 9^{2,5} =$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \log_6 3 + 5 \cdot \log_6 2 - \log_6 12 &= \quad \text{podle VII} \\ = \log_6 3^4 + \log_6 2^5 - \log_6 12 &= \quad \text{podle V} \\ = \log_6 (3^4 \cdot 2^5) - \log_6 12 &= \quad \text{podle VI} \\ = \log_6 \frac{3^4 \cdot 2^5}{12} = \log_6 \frac{3^4 \cdot 2^5}{3 \cdot 2^2} &= \log_6 3^3 \cdot 2^3 = \log_6 6^3 = \quad \text{podle VII} \\ = 3 \log_6 6 = 3 \cdot 1 &= \quad \text{podle II} \\ = 3 & \end{aligned}$$

3; -2; 2; -0,60206; 4; 2,86135; -0,5; 5

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Webová aplikace <https://www.desmos.com/calculator>

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Věty o logaritmech
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_13
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	06. 06. 2013
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list s vysvětlením a základních pojmů souvisejících s logaritmem, příklady a řešením.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	