



Funkce, rovnice a jejich užití

Logaritmická funkce a logaritmus

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_12

03. 06. 2013

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list s vysvětlením a grafy jednotlivých typů logaritmických funkcí.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logaritmická funkce a logaritmus

V předchozím jsme se zmínili o tom, že mnoho přírodních probíhá v exponenciálních závislostech. S tím úzce souvisí i závislosti logaritmické. Na principu logaritmických závislostí fungují např. lidské smysly (sluch, zrak), určování kyselin a zásad (pH) nebo Richterova stupnice pro určování síly zemětřesení. Pro výpočty v technických oborech se ještě v sedmdesátých letech 20. století běžně používalo logaritmické pravítko¹.

Exponenciální a logaritmická funkce se k sobě mají obdobně jako sčítání a odčítání nebo umocňování a odmocňování. Hodně špatně řečeno: *tam a zpět*. Pro názornost si představíme funkce jako otázky a odpovědi na ně. Ukážeme si to na konkrétních příkladech.

Exponenciální funkce $f: y = a^x$:

Kolik (y) je 10 (a) na 3 (x)?

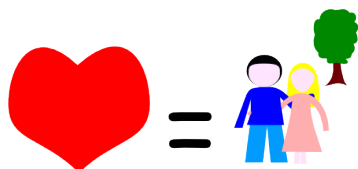
$$10^3 = 1000$$

Logaritmická funkce $g: y = \log_a x$:

Na kolikátou (y) jsme umocnili 10 (a), jestliže je to 1 000 (x)?

$$\log_{10} 1000 = 3$$

Pomoci může také poetická mnemotechnická hříčka²:



„Láska jsou dva na život (a na smrt).“



„Život je logaritmus lásky o základu dva.“

To, co je pro exponenciální funkci f definičním oborem $D(f)$ - na ose x , je pro logaritmickou funkci g se stejným **základem** oborem hodnot $H(g)$ - na ose y ; A to, co je pro exponenciální funkci f oborem hodnot $H(f)$, je pro logaritmickou funkci g se stejným **základem** definičním oborem $D(g)$.

Exponenciální a logaritmická funkce se stejným základem mají v grafu „prohozené“ osy³; grafy jsou souměrné podle osy I. a III. kvadrantu. Dvojici takových funkcí nazýváme **funkce a funkce inverzní**. V některé literatuře se k funkci f inverzní funkce značí (poněkud matoucím způsobem⁴) f^{-1} .

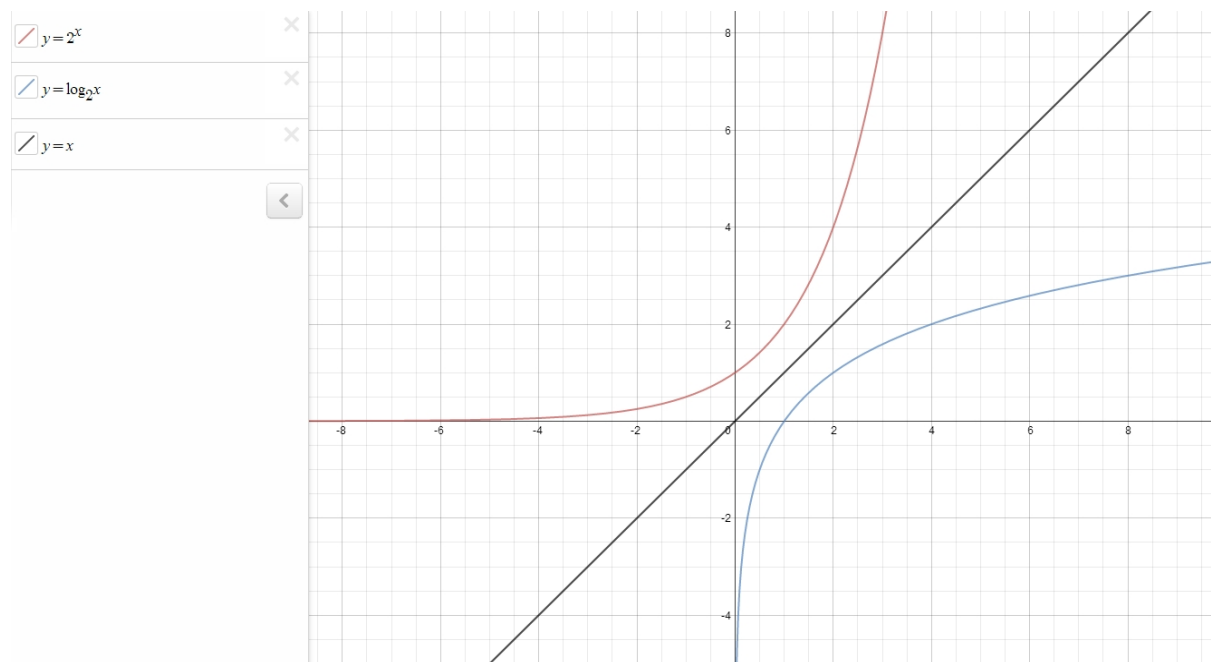
1 Přenosné bateriemi napájené počítačové stroje schopné vykonat základní početní operace i s velkými čísly - kalkulačky byly širší (i odborné) veřejnosti dostupné během první poloviny 80. let 20. století. Nahradily do té doby nezbytné matematické tabulky a logaritmická pravítka.

2 Použito v čtyřdílném seriálu ostravského studia ČST *Logaritmus lásky* z roku 1985

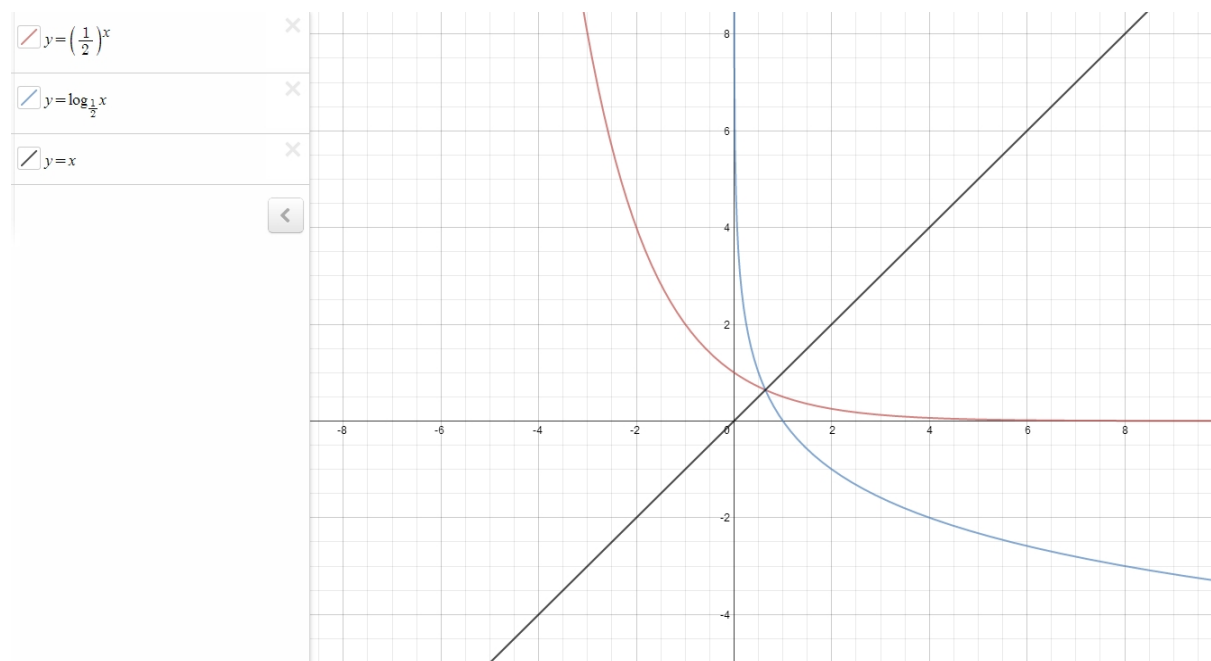
3 Jestliže osa x (jedna přímka) přejde na osu y (druhá přímka) a opačně, jedná se o osovou souměrnost; osa souměrnosti je osou I. a III. Kvadrantu ($y=x$).

4 Velice často bývá na kalkulačkách použito takové značení pro práci s goniometrickými funkcemi. Např.: známe-li velikost úhlu 30° , pro výpočet sinu tohoto úhlu použijeme $\sin 30^\circ \rightarrow 0,5$; známe-li sinus úhlu $0,5$, pro výpočet velikosti úhlu použijeme inverzní funkci $\sin^{-1} 0,5 \rightarrow 30^\circ$;

POZOR: obdobnou symboliku ale používáme i pro práci s mocninami: $2^{-1} = 0,5$ a $0,5^{-1} = 2$



Graf 1



Graf 2

Logaritmická funkce je každá funkce, ke které lze najít elementární funkci ve tvaru:

$$f: y = \log_a x$$

kde $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ (kladné reálné číslo různé od jedné), které nazýváme **základ**.

Logaritmická funkce je **inverzní** funkce k exponenciální funkci se stejným základem.

$\log_a x$ čteme: „logaritmus x o základu a “

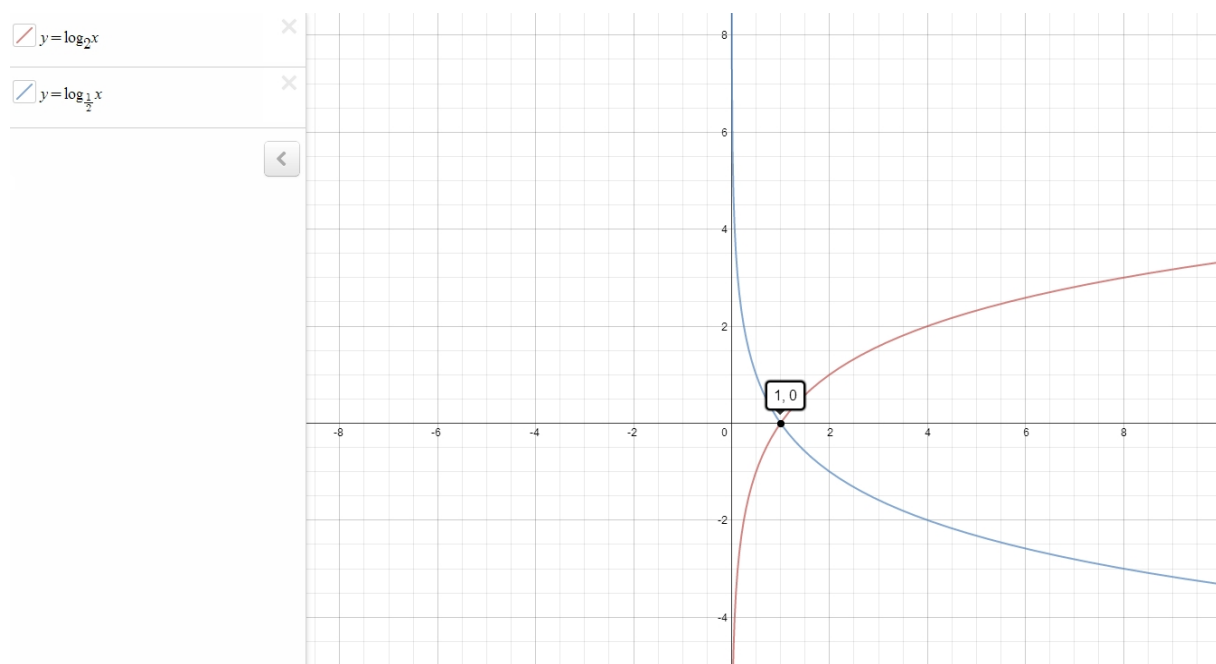
Důležité logaritmy

Dekadický logaritmus $\log x = \log_{10} x$ základ 10 čteme: „dekadický logaritmus x “

Přirozený logaritmus $\ln x = \log_e x$ základ e čteme: „přirozený logaritmus x “

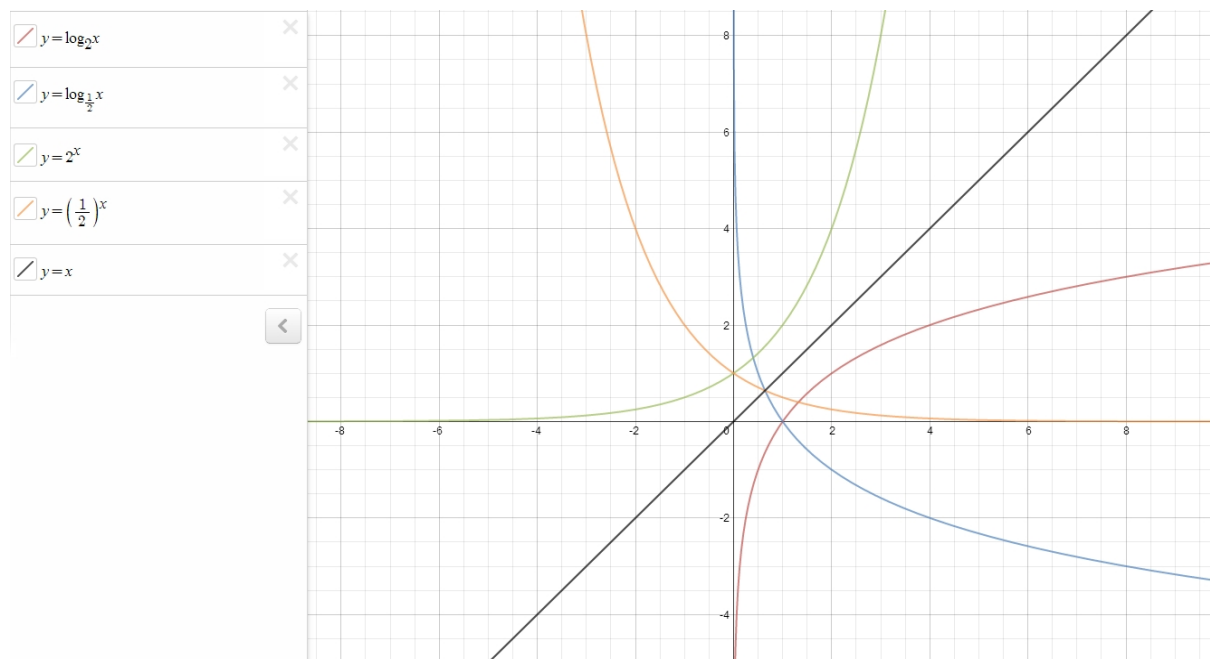
Vlastnosti $f: y = \log_a x$

- Definiční obor $D(f) = (0; \infty)$
- Obor hodnot $H(f) = \mathbb{R}$
- Funkce je **prostá**
- Pro základ $a \in (1; \infty)$ je **rostoucí**
- Pro základ $a \in (0; 1)$ je **klesající**
- **Graf: exponenciála**
 - *asymptota* - je vždy jedna a rovnoběžná s *osou* y
 - *Význačný bod*: **[1;0]**



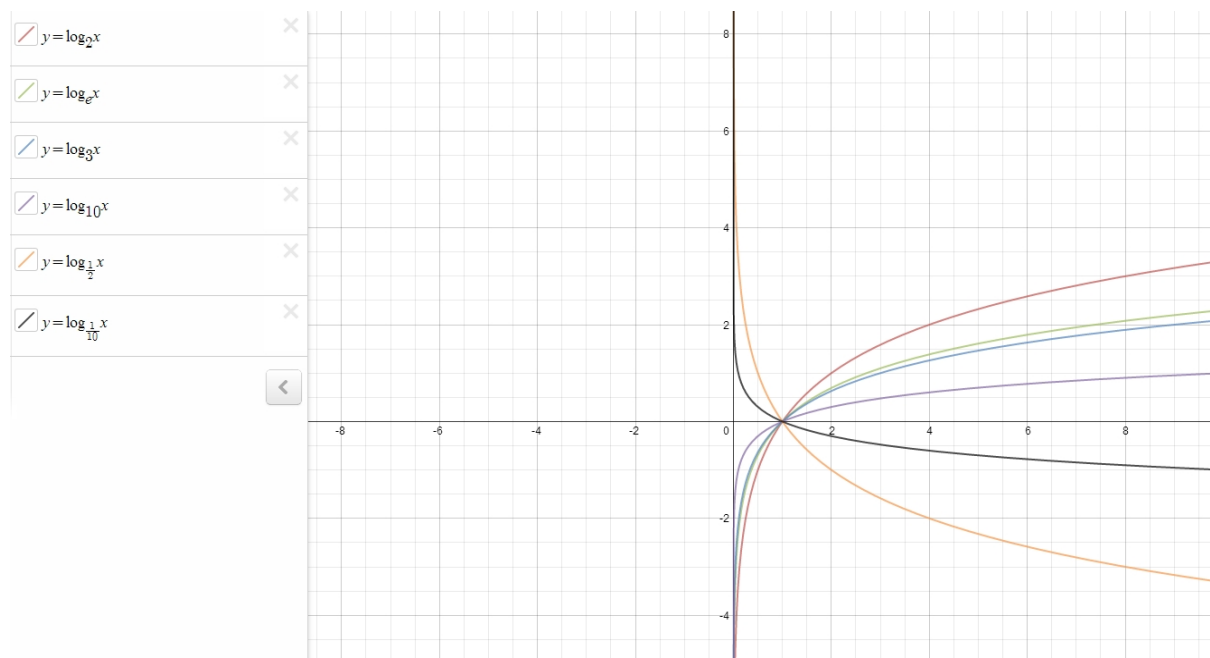
Graf 3

Barevně vyznačte funkční předpisy a grafy jednotlivých funkcí.



Graf 4: Tatáž exponenciála (různě orientovaná) je grafem dvou exponenciálních a dvou logaritmických funkcí

Barevně vyznačte funkční předpisy a grafy jednotlivých funkcí.



Graf 5: Důležité logaritmické funkce

Příklad 1

	Určete	Řešení:
$\log_2 1024 =$		$\log_2 2^{10} = 10$
$\log_4 1024 =$		$\log_4 4^5 = 5$
$\log_{32} 1024 =$		$\log_{32} 32^2 = 2$
$\log_2 8 =$		$\log_2 2^3 = 3$
$\log_2 \frac{1}{64} =$		$\log_2 \frac{1}{64} = \log_2 (64)^{-1} = \log_2 (2^6)^{-1} = \log_2 2^{-6} = -6$
$\log_4 \frac{1}{64} =$		$\log_4 \frac{1}{64} = \log_4 (64)^{-1} = \log_4 (4^3)^{-1} = \log_4 4^{-3} = -3$
$\log_{\frac{1}{2}} 1024 =$		$\log_{\frac{1}{2}} 1024 = \log_{\frac{1}{2}} 2^{10} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = -10$
$\log_{\frac{1}{4}} 1024 =$		$\log_{\frac{1}{4}} 4^5 = -5$
$\log_{\frac{1}{32}} 1024 =$		$\log_{\frac{1}{32}} 1024 = -2$
$\log_{\frac{1}{2}} 8 =$		$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$
$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} =$		$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 6$
$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} =$		$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = 3$

Příklad 2

	Určete	Řešení:
$\log 1000 =$		$\log 1000 = \log 10^3 = 3$
$\log 1000000 =$		$\log 1000000 = \log 10^6 = 6$
$\log 10^{15} =$		$\log 10^{15} = 15$
$\log 100 =$		$\log 100 = 2$
$\log \frac{1}{1000} =$		$\log \frac{1}{1000} = \log 10^{-3} = -3$
$\log 0,000001 =$		$\log 0,000001 = \log 10^{-5} = -5$
$\log 10^{-23} =$		$\log 10^{-23} = -23$

Příklad 3

	Určete	Řešení:
$\log_5 625 =$		$\log_5 625 = \log_5 25^2 = \log_5 (5^2)^2 = \log_5 5^4 = 4$
$\log_{25} 625 =$		$\log_{25} 25^2 = 2$
$\log_5 \sqrt{5} =$		$\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{0,5} = 0,5$
$\log_7 \frac{1}{49} =$		$\log_7 \frac{1}{49} = \log_7 \frac{1}{7^2} = -2$
$\log_3 81 =$		$\log_3 81 = 4$
$\log_9 81 =$		$\log_9 81 = 2$
$\log_{12} 144 =$		$\log_{12} 144 = 2$
$\log_2 \sqrt[3]{4} =$		$\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 (2^2)^{\frac{1}{3}} = \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$
$\log_2 16^3 =$		$\log_2 16^3 = \log_2 (2^4)^3 = \log_2 2^{12} = 12$

Určit některé logaritmy není obtížné (viz Příklad 1 až 3). K vyčíslení obtížnějších logaritmů se dříve používaly matematické tabulky, dnes máme práci díky kalkulačkám mnohem snazší. Novější kalkulačky poskytují plný komfort (lze na nich volit libovolné základy logaritmů); starší stroje měly k dispozici funkce pro přímé počítání s dekadickými a přirozenými logaritmy (pro zručnějšího počítače celkem dostatečná výbava - logaritmy s různými základy lze mezi sebou přepočítat).

Příklad 4

Určete přibližně:

$$\log_2 100 =$$

$$\log_3 100 =$$

$$\log_4 100 =$$

$$\log_5 100 =$$

$$\log 100 =$$

Řešení: bez kalkulačky se pokusíme určit mezi kterými celými čísly leží příslušné logaritmy.

a) $\log_2 100$
 $6 = \log_2 2^6 = \log_2 64 < \log_2 100 < \log_2 128 = \log_2 2^7 = 7$



Graf 6

b) $\log_3 100$
 $4 = \log_3 3^4 = \log_3 81 < \log_3 100 < \log_3 243 = \log_3 3^5 = 5$

c) $\log_4 100$
 $3 = \log_4 2^3 = \log_4 64 < \log_4 100 < \log_4 256 = \log_4 2^4 = 4$

d) $\log_5 100$
 $2 = \log_5 2^2 = \log_5 25 < \log_5 100 < \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

e) $\log 100$
 $\log 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

Přesnější hodnoty lze získat pomocí kalkulačky, ale to až příště.

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Webová aplikace <https://www.desmos.com/calculator>

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Logaritmická funkce a logaritmus
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_12
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	03. 06. 2013
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list s vysvětlením a grafy jednotlivých typů logaritmických funkcí.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	