



Funkce, rovnice a jejich užití

Exponenciální funkce

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_11

17. 05. 2013

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list s vysvětlením a grafy jednotlivých typů exponenciálních funkcí.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce je každá funkce, ke které lze najít elementární funkci ve tvaru:

$$f: y = a^x$$

kde $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ (kladné reálné číslo různé od jedné), které nazýváme **základ**.

Několik konkrétních názorných příkladů¹:

$$f: y = 3^x$$

$$g: y = 2^{(x+1)}$$

$$h: y = 0,5^x - 4$$

$$i: y = \frac{1}{3^x}$$

$$j: y = 10^{2x}$$

$$k: y = e^x$$

$$l: y = \pi^x$$

POZOR!

Mocninná funkce

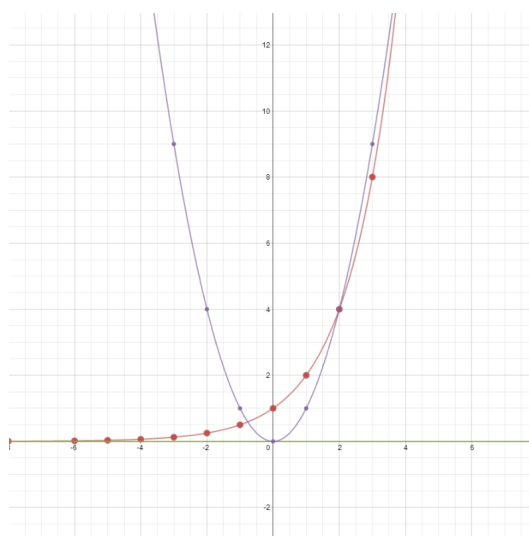
$$y = x^a$$

$$y = x^2$$

Exponenciální funkce

$$y = a^x$$

$$y = 2^x$$



Graf 1 - porovnání mocninné a exponenciální funkce

1 Porovnejte s **mocninnými** funkcemi „obdobného vzezření“:

$$f_m: y = x^3$$

$$g_m: y = (x+1)^2$$

$$h_m: y = x^{0,5} - 4$$

$$i_m: y = \frac{1}{x^3}$$

$$j_m: y = 2x^{10}$$

$$k_m: y = x^e$$

$$l: y = x^\pi$$

Příklad 1

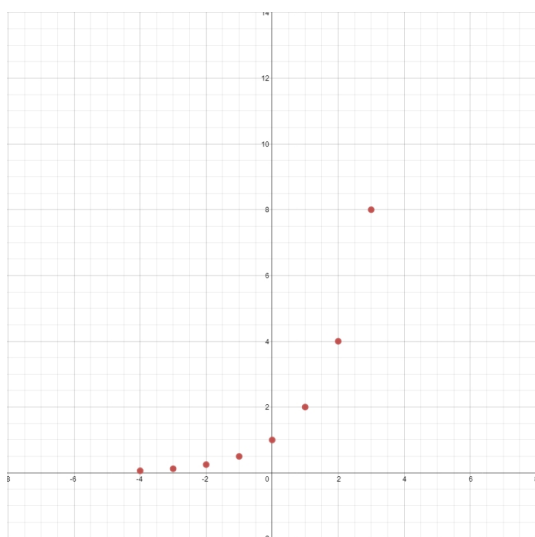
Funkci $f : y = 2^x$ zadejte tabulkou, načrtněte její graf a určete její vlastnosti.

Tabulka

| | | | | | | | | | |
|----------|--------|-------|------|-----|----------|---|---|---|----|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 0,0625 | 0,125 | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |

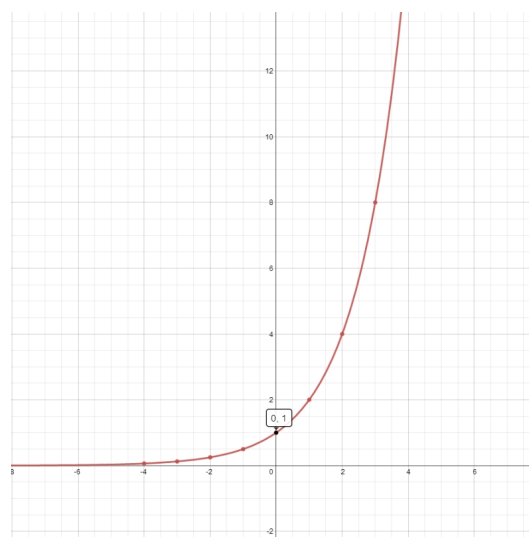
Graf

Body znázorníme v Oxy ...



Graf 2

... a proložíme jimi křivku



Graf 3

Vlastnosti

- Definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$
- Obor hodnot $H(f) = (0; \infty)$

číslo 2 lze umocnit libovolným reálným číslem
 ať umocňujeme číslo 2 sebemenším (záporným) číslem, vždy bude mocnina větší než 0 → ASYMPTOTA (splývá s osou x) → **zdola omezená**
 vyšší mocnina čísla 2 nabývá větších hodnot → **shora neomezená**

protože $2^0 = 1$, prochází graf bodem **[0;1]**

- Funkce je **rostoucí**
- Funkce je **prostá**
- Základ $a \in (1; \infty)$

Příklad 2

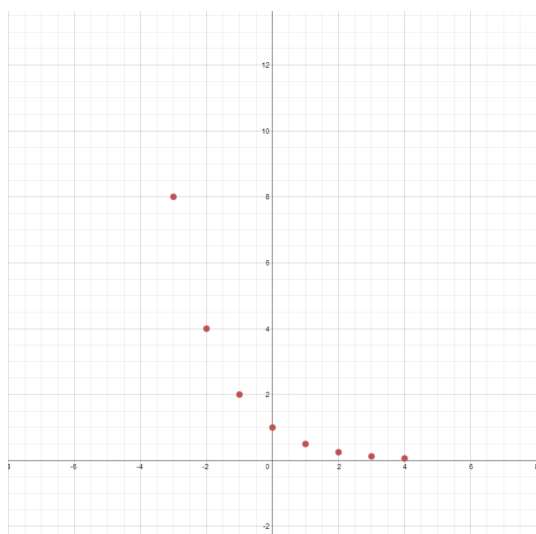
Funkci $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ zadejte tabulkou, načrtněte její graf a určete její vlastnosti.

Tabulka

| | | | | | | | | | |
|----------|----|----|----|----|----------|-----|------|-------|--------|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,0625 |

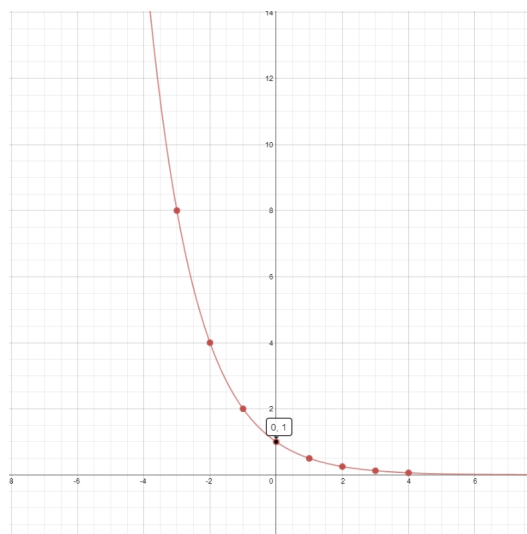
Graf

Body znázorníme v *Oxy* ...



Graf 4

... a proložíme jimi křivku



Graf 5

Vlastnosti

- Definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$
- Obor hodnot $H(f) = (0; \infty)$

číslo 0,5 lze umocnit libovolným reálným číslem
 ať umocňujeme číslo 0,5 sebevětším (kladným) číslem, vždy bude mocnina větší než 0 → **ASYMPTOTA** (splývá s osou x) → **zdola omezená**
 nižší mocnina čísla 0,5 nabývá větších hodnot → **shora neomezená**

protože $0,5^0 = 1$, prochází graf bodem **[0;1]**

- Funkce je **klesající**
- Funkce je **prostá**
- Základ $a \in (0; 1)$

Příklad 3 – základ mimo definici

Funkci $f : y = (-2)^x - 2$ zadejte tabulkou, načrtněte její graf a určete její vlastnosti.

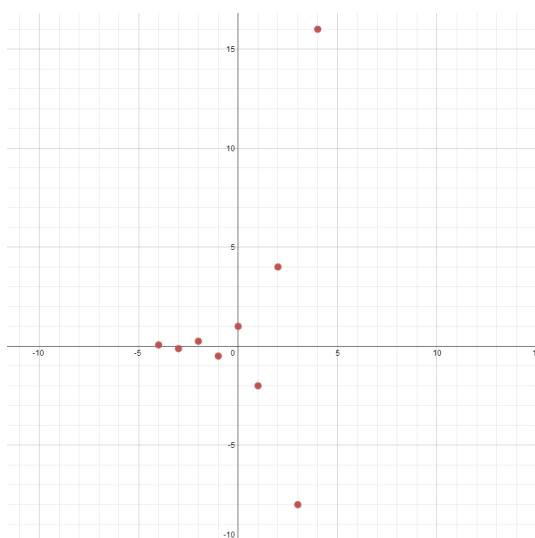
Tabulka

| | | | | | | | | | |
|----------|--------|--------|------|------|----------|----|---|----|----|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 0,0625 | -0,125 | 0,25 | -0,5 | 1 | -2 | 4 | -8 | 16 |

Graf

Body znázorníme v *Oxy* ...

... a jimi křivku grafu funkce proložit **nelze**



Graf 6

Vlastnosti

- Definičním oborem takové funkce nemůže být interval, ale jen diskrétní body, proto ji ze svých úvah vyjme a nebudeme o ní hovořit jako o funkci exponenciální.
- Základ $a \in (-\infty; 0)$

Pro základy 0 nebo 1 se funkce stává konstantní funkcí.

2 **Rozlišujte:** $f : y = (-2)^x$
 $g : y = -2^x = -(2)^x$

Graf exponenciální funkce

Grafem exponenciální funkce je křivka, která se nazývá **exponenciála**.

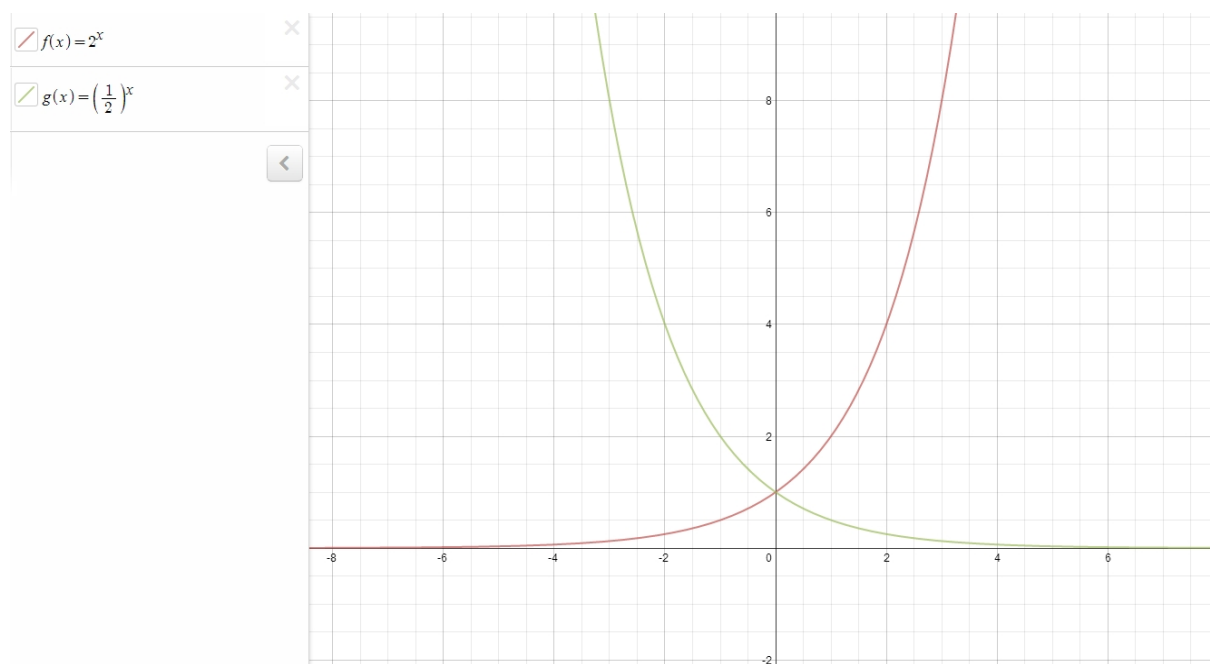
Exponenciála je specifická křivka obdobně jako parabola nebo hyperbola; žádná exponenciála se nikdy nekryje s žádnou větví hyperboly.

Exponenciála nikdy neprotne **asymptotu** - ta je vždy jedna a rovnoběžná s *osou x*.

Význačným bodem, který nám slouží pro lepší orientaci, je **[0;1]**.

- **Základy** $a; \frac{1}{a}$

Jsou-li základy exponenciálních funkcí čísla převrácená, jsou grafy obou funkcí **osově souměrné podle osy y** - jedná se o stejnou exponenciálu, ale jinak umístěnou.



Graf 7

- **Základ** $a \in (1; \infty)$

Funkce s větším základem (pro $x > 0$) strměji roste.

Rostoucí funkce

Exponenciální funkce rostou daleko strměji než mocninné funkce³.

Z hlediska použití jsou nejvýznamnější exponenciální funkce se základy⁴: 2; 10; e



Graf 8

- I v běžném jazyce se někdy používá termín *exponenciální růst* nebo *roste to geometrickou řadou* (geometrická řada je zvláštní případ související s exponenciální funkcí).
- e je tzv. **Eulerovo číslo**. Většina přírodních dějů závisí na exponenciálních funkcích odvozených z tzv. **přirozené exponenciální funkce** e^x ; e je iracionální číslo (má neukončený periodicky se neopakující desetinný rozvoj – nelze ho zapsat zlomkem. $E = 2,718\ 281\ 828\dots$)
Exponenciální funkce se základem **10** se nazývá **dekadická exponenciální funkce** – jelikož používáme desítkovou (dekadickou) číselnou soustavu, je i taková exponenciální funkce pro nás důležitá.

- **Základ** $a \in (0; 1)$

Funkce s menším základem (pro $x < 0$) strměji klesá.

Klesající funkce



Graf 9

Poznámka:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1^x}{a^x} = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^{-x} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} \quad \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$$

Příklad 4

$$f: y = 3 \cdot 2^x$$

$$g: y = 0,5 \cdot 2^x$$

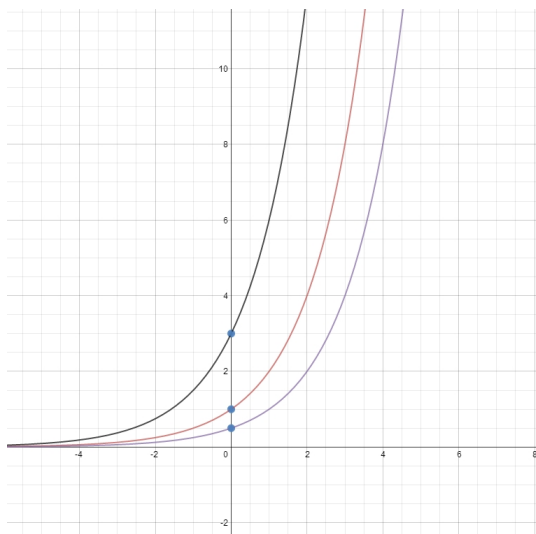
$$h: y = 2^x - 1$$

Načrtněte grafy funkcí $i: y = 2^{(x+1)}$ a porovnejte je s grafem funkce $y = 2^x$.

$$j: y = -2^x$$

$$k: y = 2^{-x}$$

$$l: y = 2^{3x}$$



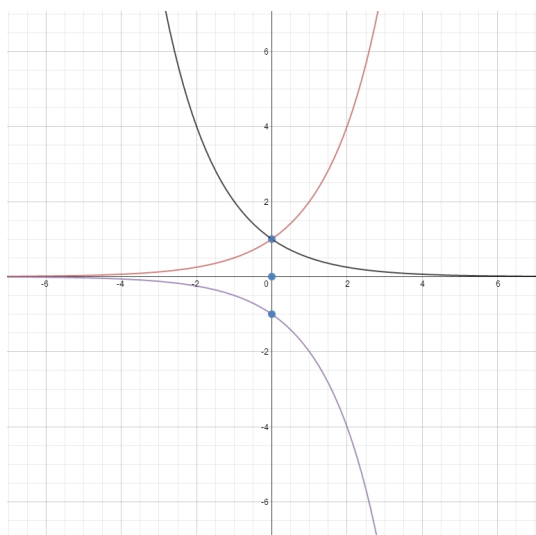
Graf 10 $f: y = 3 \cdot 2^x$ $g: y = 0,5 \cdot 2^x$



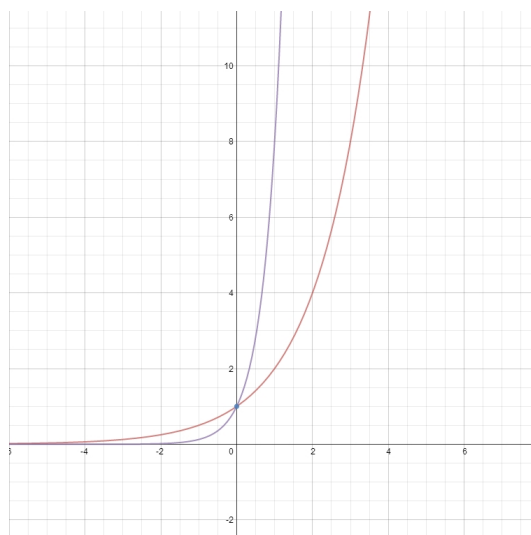
Graf 11 $h: y = 2^x - 1$ $i: y = 2^{(x+1)}$

$$k: y = 2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$l: y = 2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$$



Graf 12 $j: y = -2^x$ $k: y = 2^{-x}$



Graf 13 $l: y = 2^{3x}$

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Webová aplikace <https://www.desmos.com/calculator>

| | |
|--|--|
| Registrační číslo | CZ.1.07/1.5.00/34.0577 |
| Šablona | IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol |
| Tematická oblast | Funkce, rovnice a jejich užití |
| Název | Exponenciální funkce |
| Číslo DUM | VY_42_inovace_M2_11 |
| Autor | Mgr. Pavel Nekvinda |
| Ověřeno ve výuce dne | 17. 05. 2013 |
| Předmět | Matematika |
| Ročník | P2 |
| Anotace, klíčová slova, metodický pokyn | Pracovní list s vysvětlením a grafy jednotlivých typů exponenciálních funkcí. |
| Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora. | |