



Funkce, rovnice a jejich užití

Kvadratická nerovnice

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_05

03. 04. 2013

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list se zadáním a řešením jednotlivých typů kvadratických nerovnic.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kvadratická nerovnice

Kvadratická nerovnice je každá nerovnice, která je zapsaná nebo ji lze zapsat v některém z tvarů:

$$ax^2+bx+c < 0$$

$$ax^2+bx+c \leq 0$$

$$ax^2+bx+c > 0$$

$$ax^2+bx+c \geq 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

Algebraické řešení kvadratické nerovnice vyplývá z jasné představy související kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$; k řešení využijeme i pomocnou kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$.

Následně si vytvoříme mechanismus, který nám pomůže řešení zefektivnit.

Příklad 1

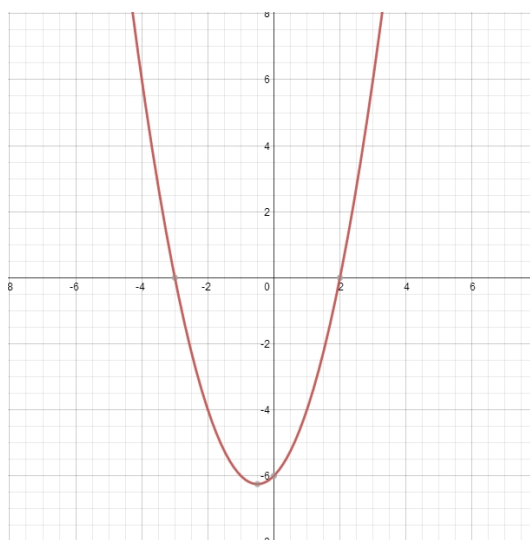
Řešte kvadratickou nerovnici $x^2 + x - 6 < 0$.

Graf související funkce $y = x^2 + x - 6$ protíná osu x v bodech, kde $f(x) = 0$, což jsou kořeny pomocné kvadratické rovnice $x^2 + x - 6 = 0$; v našem případě to jsou body -3 a 2 .¹

- Tam, kde je graf funkce **protíná osu x** , jsou funkční hodnoty funkce **rovny nula**
 $f(x) = 0$ $x^2 + x - 6 = 0$
 $x = -3 \wedge x = 2$

- Tam, kde je graf funkce **pod osou x** , jsou funkční hodnoty funkce **menší než nula**
 $f(x) < 0$ $x^2 + x - 6 < 0$
 $x \in (-3; 2)$
 např. $f(0) = -6$; $f(-2) = -4$

- Tam, kde je graf funkce **nad osou x** , jsou funkční hodnoty funkce **větší než nula**
 $f(x) > 0$ $x^2 + x - 6 > 0$
 $x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$
 např. $f(-4) = 6$; $f(3) = 6$



Graf 1

(Intervaly a body barevně vyznačte do Grafu 1.)

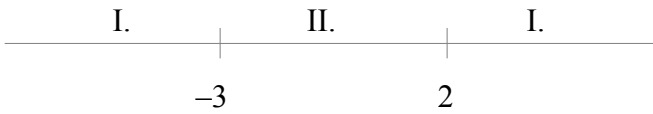
Vzhledem k zadání je tedy zřejmé, že řešením nerovnice jsou $x \in (-3; 2)$.

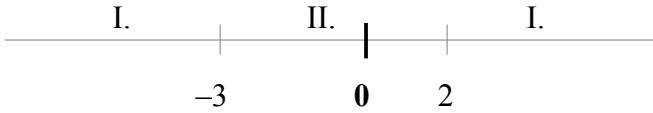
$$\begin{array}{l} 1 \quad f(-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -3 \\ \quad \quad f(2) = 0 \quad \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2 \end{array}$$

Shrnutí

Parabola (graf) související kvadratické funkce protála *osu x* ve dvou bodech (kořeny pomocné kvadratické rovnice x_1, x_2), čímž *osu x* rozdělila na tři, resp. **dva** intervaly - vnitřek paraboly a dvě vnější části paraboly. Řešením nerovnice je **bud'** vnitřní **anebo** vnější interval, **jiná možnost není**². Pokud alespoň jedno x z intervalu (např. vnitřního) splní podmínku nerovnice, budou rovnici vyhovovat i všechny ostatní prvky ze stejného intervalu (např. vnitřního).

Mechanismus

1. Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x-6 < 0$. zadání
2. Vyřešíme pomocnou rovnici $x^2+x-6=0$ nulové body
 $x_1=-3$
 $x_2=2$
3. Znázorníme na číselné ose číselná osa


$\begin{array}{ccccccc} & \text{I.} & & \text{II.} & & \text{I.} & \\ & | & & | & & | & \\ \hline & & -3 & & & 2 & \\ & & | & & & | & \end{array}$
4. Zvolíme **vhodný** bod z vnitřního intervalu (II.), např. $x=0$ vhodný bod


$\begin{array}{ccccccc} & \text{I.} & & \text{II.} & & \text{I.} & \\ & | & & | & & | & \\ \hline & & -3 & & 0 & & 2 \\ & & | & & | & & | \end{array}$
5. Zvolené $x \in II.$ dosadíme do nerovnice $x^2+x-6 < 0$ dosazení
 $0^2+0-6 < 0$
 $-6 < 0$ *PRAVDA*
6. Jestliže $x=0$ z intervalu II. splňuje nerovnici, je řešením nerovnice závěr
II. interval:
 $x \in (-3; 2)$

2 Jak praví staří latiníci: *Tercium non datur.*

Příklad 2

úloha zdánlivě podobná

Řešte kvadratickou nerovnici $-x^2 - x + 6 < 0$.

1. Řešte kvadratickou nerovnici $-x^2 - x + 6 < 0$

zadání

2. Vyřešíme pomocnou rovnicí $-x^2 - x + 6 = 0$

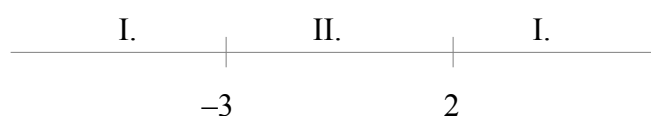
nulové body

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 2$$

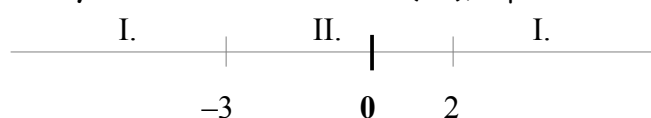
3. Znázorníme na číselné ose

číselná osa



4. Zvolíme **vhodný** bod z vnitřního intervalu (II.), např. $x = 0$

vhodný bod



5. Zvolené $x \in II.$ dosadíme do nerovnice $-x^2 - x + 6 < 0$

dosazení

$$0^2 + 0 + 6 < 0$$

$$6 < 0 \quad \text{NEPRAVDA}$$

6. Jestliže $x = 0$ z intervalu II. nesplňuje nerovnici, je řešením nerovnice

závěr

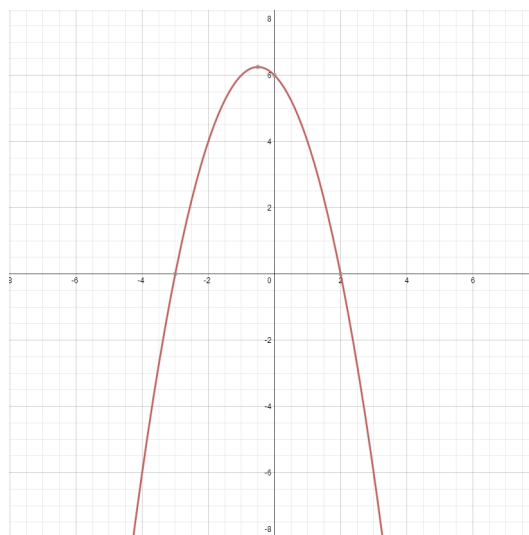
I. interval:

$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$$

Jak je to možné?

Z grafu související funkce je to zřejmé:

(Řešení barevně vyznačte do grafu)



Graf 2

Příklad 3

úloha zdánlivě podobná

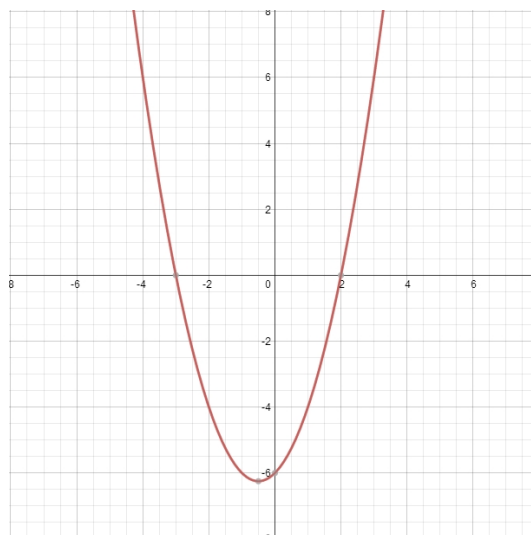
Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x-6>0$.

1. Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x-6>0$ zadání
 2. Vyřešíme pomocnou rovnici $x^2+x-6=0$ nulové body
 $x_1=-3$
 $x_2=2$
 3. Znázorníme na číselné ose číselná osa
- A horizontal number line with tick marks at -3 and 2. The region to the left of -3 is labeled 'I.', the region between -3 and 2 is labeled 'II.', and the region to the right of 2 is labeled 'I.'.
4. Zvolíme **vhodný** bod z vnitřního intervalu (II.), např. $x=0$ vhodný bod
- A horizontal number line with tick marks at -3, 0, and 2. The region to the left of -3 is labeled 'I.', the region between -3 and 2 is labeled 'II.', and the region to the right of 2 is labeled 'I.'. A vertical tick mark is drawn at 0, which is inside the 'II.' interval.
5. Zvolené $x \in II.$ dosadíme do nerovnice $x^2+x-6>0$ dosazení
 $0^2+0-6>0$
 $-6>0$ *NEPRAVDA*
 6. Jestliže $x=0$ z intervalu II. nesplňuje nerovnici, je řešením nerovnice závěr
I. interval:
 $x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$

Jak je to možné?

Z grafu související funkce je to zřejmé:

(Řešení barevně vyznačte do grafu)



Graf 3

Příklad 4

úloha zdánlivě podobná

Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+6>0$.

- | | |
|--|-------------|
| 1. Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+6>0$ | zadání |
| 2. Vyřešíme pomocnou rovnicí $x^2+x+6=0$
$x_{1,2} \in \emptyset$ nemá kořeny, osu x neprotíná | nulové body |
| 3. Znázorníme na číselné ose | číselná osa |

I.

- | | |
|---|------------|
| 4. Zvolíme vhodný bod z intervalu (I) , např. $x=0$ | vhodný bod |
|---|------------|

I.

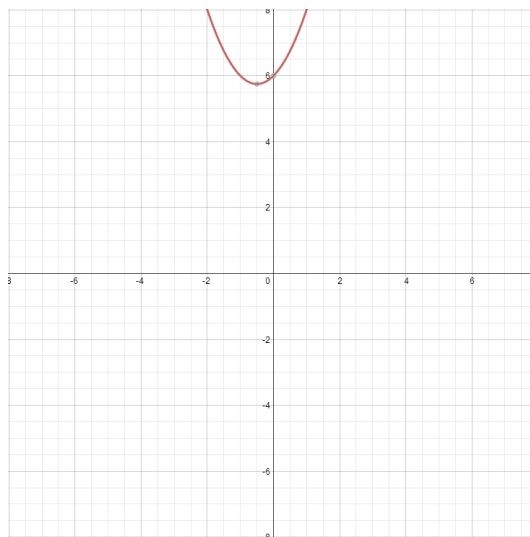
|
0

- | | |
|--|----------|
| 5. Zvolené $x \in I$. dosadíme do nerovnice $x^2+x+6>0$
$0^2+0+6>0$
$6>0$ PRAVDA | dosazení |
| 6. Jestliže $x=0$ z intervalu I splňuje nerovnici, je řešením nerovnice
I . interval:
$x \in \mathbb{R}$ | závěr |

Jak je to možné?

Z grafu související funkce je to zřejmé:

(Řešení barevně vyznačte do grafu)



Graf 4

Příklad 5

úloha zdánlivě podobná

Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+6<0$.

1. Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+6<0$

zadání

2. Vyřešíme pomocnou rovnici $x^2+x+6=0$

nulové body

$x_{1,2} \in \emptyset$ nemá kořeny, osu x neprotíná

3. Znázorníme na číselné ose

číselná osa

I.

4. Zvolíme vhodný bod z intervalu (I) , např. $x=0$

vhodný bod

I.

|

0

5. Zvolené $x \in I$. dosadíme do nerovnice $x^2+x+6<0$

dosazení

$$0^2+0+6<0$$

$$6<0 \quad \text{NEPRAVDA}$$

6. Jestliže $x=0$ z intervalu I nesplňuje nerovnici, není řešením nerovnice

závěr

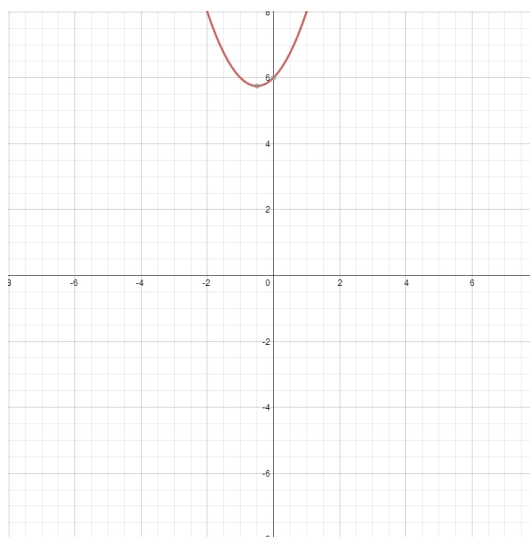
I . Interval a tedy:

$$x \in \emptyset$$

Jak je to možné?

Z grafu souvisající funkce je to zřejmé:

(Řešení barevně vyznačte do grafu)



Graf 4

Příklad 6

úloha zdánlivě podobná

Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+0,25>0$.

1. Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+0,25>0$

zadání

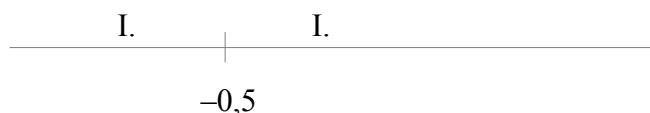
2. Vyřešíme pomocnou rovnicí $x^2+x+0,25=0$

nulové body

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25}}{2 \cdot 1} = -0,5$$

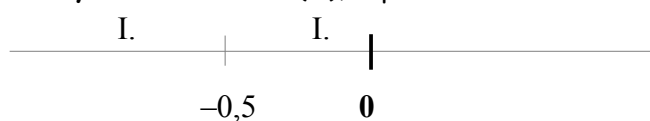
3. Znázorníme na číselné ose

číselná osa



4. Zvolíme vhodný bod z intervalu (I.), např. $x=0$

vhodný bod



5. Zvolené $x \in I$. dosadíme do nerovnice $x^2+x+0,25>0$

dosazení

$$\begin{aligned} 0^2+0+0,25 &> 0 \\ 0,25 &> 0 \quad \text{PRAVDA} \end{aligned}$$

6. Jestliže $x=0$ z intervalu I . splňuje nerovnici, je řešením nerovnice

závěr

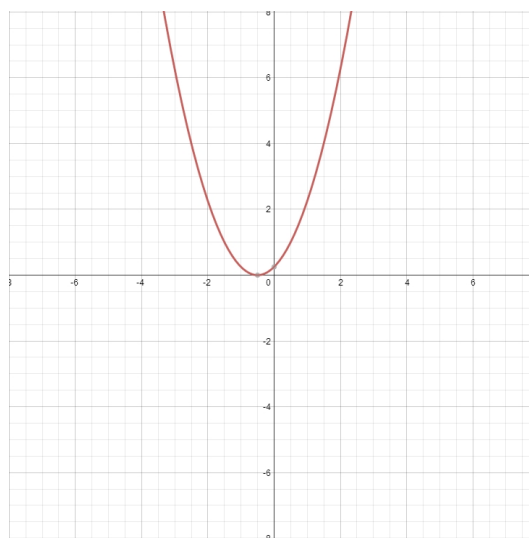
I . Interval bez $-0,5$ ($f(-0,5) = 0$) a tedy:

$$x \in \mathbb{R} - \{-0,5\}$$

Jak je to možné?

Z grafu související funkce je to zřejmé:

(Řešení barevně vyznačte do grafu)



Graf 6

Příklad 7

úloha zdánlivě podobná

Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+0,25<0$.

1. Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+0,25<0$

zadání

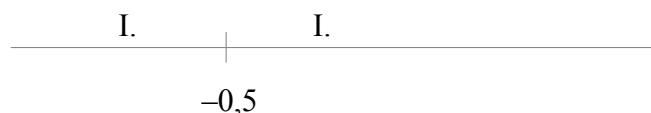
2. Vyřešíme pomocnou rovnici $x^2+x+0,25=0$

nulové body

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25}}{2 \cdot 1} = -0,5$$

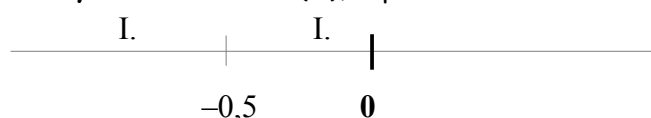
3. Znázorníme na číselné ose

číselná osa



4. Zvolíme vhodný bod z intervalu (I), např. $x=0$

vhodný bod



5. Zvolené $x \in I$. dosadíme do nerovnice $x^2+x+0,25<0$

dosazení

$$0^2+0+0,25<0$$

$$0,25<0 \quad \text{NEPRAVDA}$$

6. Jestliže $x=0$ z intervalu I . nesplňuje nerovnici, není řešením nerovnice

závěr

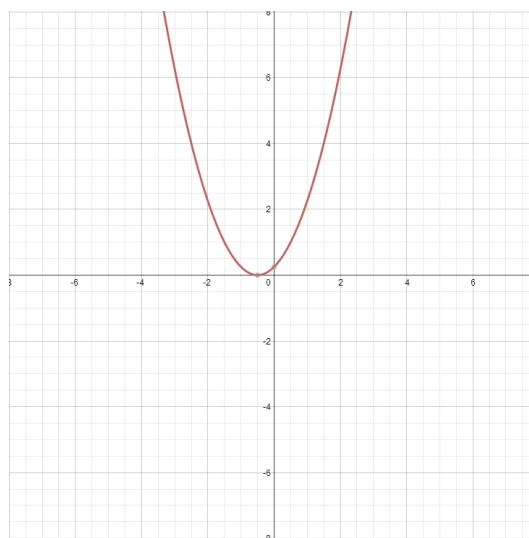
I . interval ani bod $-0,5$ ($f(-0,5) = 0$) a tedy:

$$x \in \emptyset$$

Jak je to možné?

Z grafu související funkce je to zřejmé:

(Řešení barevně vyznačte do grafu)



Graf 7

Příklad 8

úloha zdánlivě podobná

Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+0,25 \leq 0$.

1. Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+0,25 \leq 0$

zadání

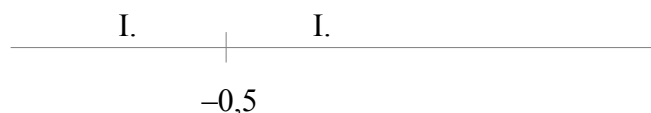
2. Vyřešíme pomocnou rovnici $x^2+x+0,25=0$

nulové body

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25}}{2 \cdot 1} = -0,5$$

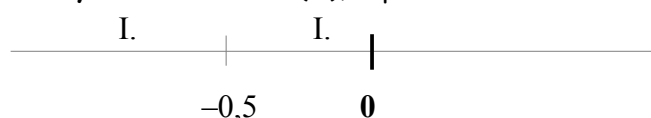
3. Znázorníme na číselné ose

číselná osa



4. Zvolíme vhodný bod z intervalu (I), např. $x=0$

vhodný bod



5. Zvolené $x \in I$. dosadíme do nerovnice $x^2+x+0,25 \leq 0$

dosazení

$$0^2+0+0,25 \leq 0$$

$$0,25 \leq 0 \quad \text{NEPRAVDA}$$

6. Jestliže $x=0$ z intervalu I . nesplňuje nerovnici, není řešením nerovnice I . interval ale **pouze** bod $-0,5$ ($f(-0,5) = 0$) a tedy:

závěr

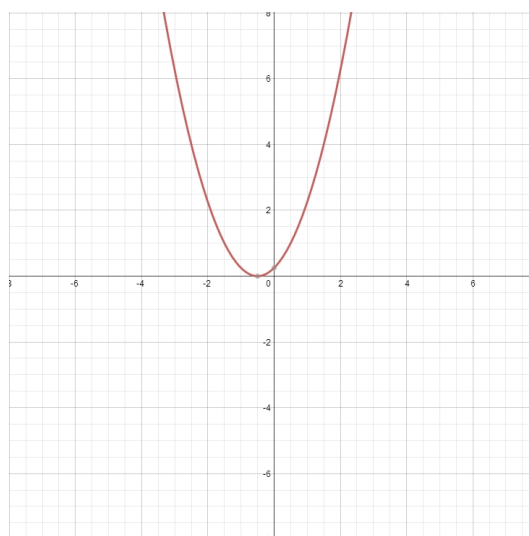
$$x \in -0,5 \quad \text{neboli} \quad x = -0,5$$

Nerovnice má **jediné** řešení.

Jak je to možné?

Z grafu související funkce je to zřejmé:

(Řešení barevně vyznačte do grafu)



Graf 8

Příklad 9

úloha zdánlivě podobná

Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+0,25 \geq 0$.

1. Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x+0,25 \geq 0$

zadání

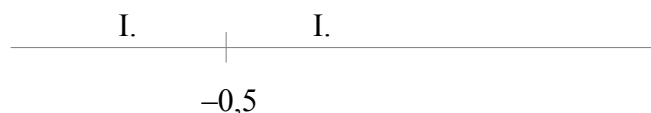
2. Vyřešíme pomocnou rovnicí $x^2+x+0,25=0$

nulové body

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25}}{2 \cdot 1} = -0,5$$

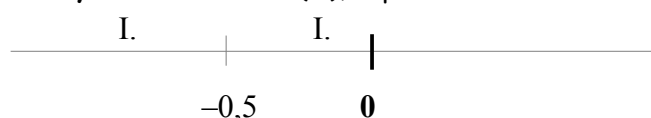
3. Znázorníme na číselné ose

číselná osa



4. Zvolíme vhodný bod z intervalu (I.), např. $x=0$

vhodný bod



5. Zvolené $x \in I$. dosadíme do nerovnice $x^2+x+0,25 \geq 0$

dosazení

$$0^2+0+0,25 \geq 0$$

$$0,25 \geq 0 \quad \text{PRAVDA}$$

6. Jestliže $x=0$ z intervalu I . splňuje nerovnici, je řešením nerovnice

závěr

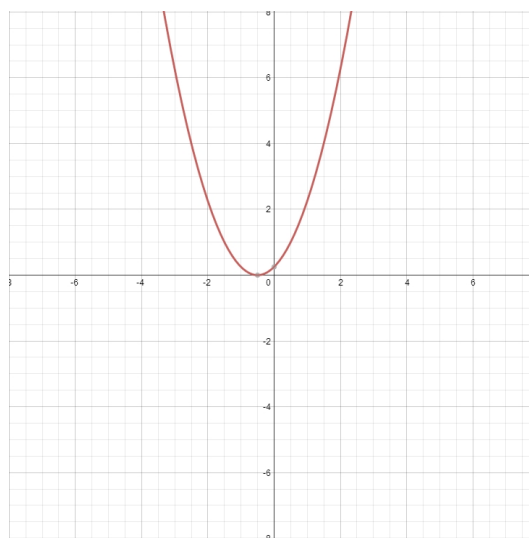
I . interval i bod $-0,5$ ($f(-0,5) = 0$) a tedy:

$$x \in \mathbb{R}$$

Jak je to možné?

Z grafu související funkce je to zřejmé:

(Řešení barevně vyznačte do grafu)



Graf 9

Příklad 10

úloha zdánlivě podobná

Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x-6 \geq 0$.

1. Řešte kvadratickou nerovnici $x^2+x-6 \geq 0$

zadání

2. Vyřešíme pomocnou rovnici $x^2+x-6=0$

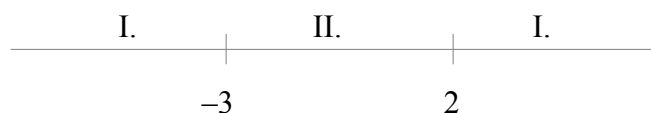
nulové body

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 2$$

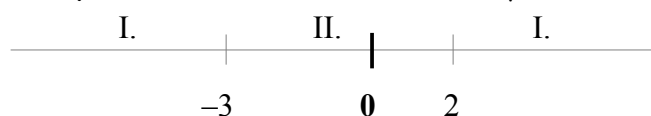
3. Znázorníme na číselné ose

číselná osa



4. Zvolíme **vhodný** bod z vnitřního intervalu (II.), např. $x=0$

vhodný bod



5. Zvolené $x \in II.$ dosadíme do nerovnice $x^2+x-6 \geq 0$

dosazení

$$0^2+0-6 \geq 0$$

$$-6 \geq 0 \quad \text{NEPRAVDA}$$

6. Jestliže $x=0$ z intervalu II. nesplňuje nerovnici, je řešením nerovnice

závěr

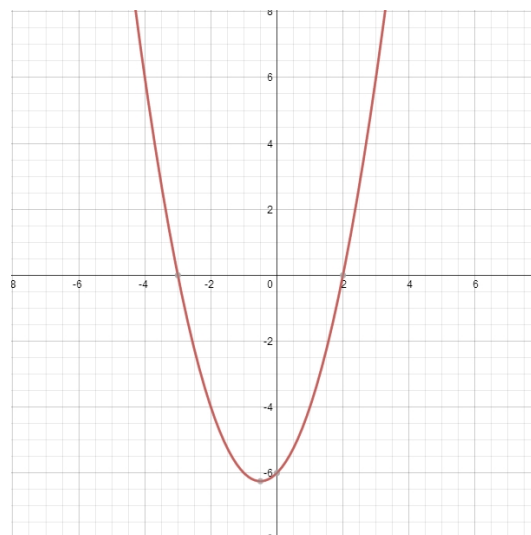
I. Interval a body -3 a 2 ($f(-3) = 0$), ($f(2) = 0$):

$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$$

Jak je to možné?

Z grafu související funkce je to zřejmé:

(Řešení barevně vyznačte do grafu)



Graf 10

Příklad 11

úloha zdánlivě podobná

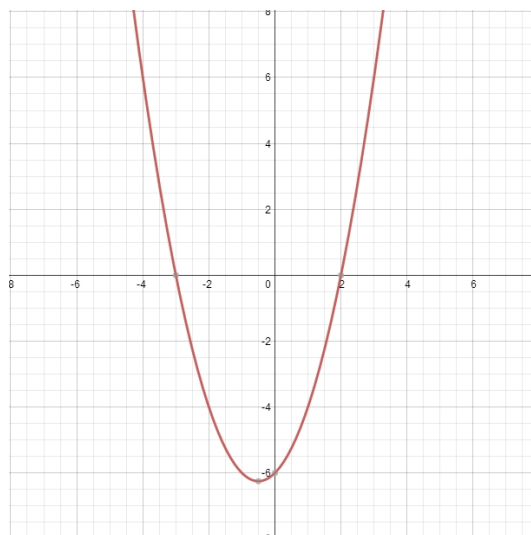
Řešte kvadratickou nerovnici $x^2 + x - 6 \leq 0$.

1. Řešte kvadratickou nerovnici $x^2 + x - 6 \leq 0$ zadání
 2. Vyřešíme pomocnou rovnicí $x^2 + x - 6 = 0$ nulové body
 $x_1 = -3$
 $x_2 = 2$
 3. Znázorníme na číselné ose číselná osa
- A horizontal number line with tick marks at -3 and 2. The region to the left of -3 is labeled 'I.', the region between -3 and 2 is labeled 'II.', and the region to the right of 2 is labeled 'I.'.
4. Zvolíme **vhodný** bod z vnitřního intervalu (II.), např. $x = 0$ vhodný bod
- A horizontal number line with tick marks at -3, 0, and 2. The region to the left of -3 is labeled 'I.', the region between -3 and 2 is labeled 'II.', and the region to the right of 2 is labeled 'I.'. A vertical tick mark is drawn at 0, which is inside the 'II.' interval.
5. Zvolené $x \in II.$ dosadíme do nerovnice $x^2 + x - 6 \leq 0$ dosazení
 $0^2 + 0 - 6 \leq 0$
 $-6 \leq 0$ *PRAVDA*
 6. Jestliže $x = 0$ z intervalu II. splňuje nerovnici, je řešením nerovnice závěr
 II. interval a body -3 a 2 ($f(-3) = 0$), ($f(2) = 0$):
 $x \in \langle -3; 2 \rangle$

Jak je to možné?

Z grafu související funkce je to zřejmé:

(Řešení barevně vyznačte do grafu)



Graf 11

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Kvadratická nerovnice
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_05
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	03. 04. 2013
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list se zadáním a řešením jednotlivých typů kvadratických nerovnic.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	