



Funkce, rovnice a jejich užití

Rozklad kvadratického trojčlenu na součin

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_03

13. 03. 2013

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list výkladem, s řešenými modelovými příklady, se zadáním a řešením příkladů k procvičení rozkladu kvadratických členů.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozklad kvadratického trojčlenu na součin

Má-li kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ kořeny x_1, x_2 , platí:

$$a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$$

K čemu je dobré takový trojčlen umět rozložit? Zatím alespoň jeden drobný příklad za všechny. Při řešení konkrétní úlohy dospějeme ke složitějšímu lomenému výrazu:

$$\frac{0,5x^2-0,5x-3}{x^2+1,5x-1} (x^2-x+0,25) .$$

Užitím rozkladů kvadratických trojčlenů na součinu a krácením místo celého výrazu stačí psát:

$$0,5x^2-1,75x+3 .$$

Nejprve si na příkladech předvedeme způsob řešení, pak si vše procvičíme a ne to, jak jsme se z prvního výrazu dostali k jednoduchému výrazu druhému již snadno přijdete sami.*

Příklad 1

Kvadratický trojčlen $8x^2-6x-5$ rozložte na součin.

- Nejprve vyřešíme *pomocnou* kvadratickou rovnici

$$8x^2-6x-5=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-5)}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm \sqrt{36+160}}{16} = \frac{6 \pm 14}{16}$$

$$x_1 = \frac{5}{4} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

- Zapíšeme rozklad na součin

$$8x^2-6x-5 = 8\left(x-\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Příklad 2

Zjednodušte výraz a uveďte podmínky existence výrazu a provedených úprav:

$$\frac{x^2-x-6}{3x^2+4x-4}$$

- Vyřešíme pomocné kvadratické rovnice

$$x^2-x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2 \quad x_2=3$$

$$3x^2+4x-4 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2 \quad x_2=\frac{2}{3}$$

- Výraz zapíšeme v součinném tvaru a zkrátíme

$$\frac{x^2-x-6}{3x^2+4x-4} = \frac{(x+2)(x-3)}{3(x+2)(x-\frac{2}{3})} = \frac{(x-3)}{3(x-\frac{2}{3})} = \frac{(x-3)}{3x-2}$$

- Výraz $\frac{x^2-x-6}{3x^2+4x-4}$ existuje jestliže jmenovatel není roven nule

$$3x^2+4x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq \frac{2}{3}$$

Příklad 3

Kvadratický trojčlen $3x^2-4x+5$ rozložte na součin.

- Nejprve vyřešíme pomocnou kvadratickou rovnicí

$$3x^2-4x+5=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-60}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-44}}{6} \Rightarrow$$

•

$$\Rightarrow \sqrt{-44} \notin \mathbb{R} \Rightarrow x_{1,2} \in \emptyset \Rightarrow$$

Rozklad v reálných číslech (\mathbb{R}) **neexistuje**.

* ... řešení úvodní úlohy:

$$\frac{0,5x^2-0,5x-3}{x^2+1,5x-1} \quad (x^2-x+0,25)$$

$$0,5x^2-0,5x-3=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-0,5) \pm \sqrt{0,5^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 0,5} = 0,5 \pm 2,5 \quad x_1=3 \quad x_2=-2$$

$$x^2+1,5x-1=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1,5 \pm 2,5}{2} \quad x_1=-2 \quad x_2=0,5$$

$$x^2-x+0,25=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 0}{2} \quad x_{1,2}=0,5$$

$$\frac{0,5x^2-0,5x-3}{x^2+1,5x-1} \cdot (x^2-x+0,25) = \frac{0,5 \cdot (x-3) \cdot (x+2)}{(x+2) \cdot (x-0,5)} \cdot (x-0,5)^2 = 0,5 \cdot (x-3) \cdot (x-0,5) =$$

$$= 0,5x^2 - 1,75x + 3$$

Sbírka

Kvadratické trojčleny (dvojčleny) rozložte na součin

1. $x^2 - 6x + 8$

2. $x^2 - 2x + 1$

3. $x^2 + x - 2$

4. $x^2 + 4x - 12$

5. $x^2 + 12x + 32$

6. $x^2 - 8x + 16$

7. $x^2 - 6x + 14$

8. $10x^2 - 11x + 3$

9. $x^2 + x - 30$

10. $100x^2 - 110x - 126$

11. $9x^2+12x+4$

12. $3x^2+16x+51$

13. $20x^2+22x+6$

14. $-x^2+x-3$

Lomené výrazy upravte a uveďte podmínky jejich existence

15. $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

16. $\frac{10x^2 + 11x + 3}{2x + 1}$

17. $\frac{-100x^2 + 30x - 2}{3 - 20x - 100x^2}$

18. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

$$19. \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$20. \frac{2x^2 + 5x + 2}{6x^2 + x - 1}$$

$$21. \frac{x^2 - 3}{x^2 - \sqrt{3}x}$$

$$22. \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$$

Řešení

1. $(x-2)(x-4)$
2. $(x-1)^2$
3. $(x-2)(x+1)$
4. $(x-2)(x+6)$
5. $(x+4)(x+8)$
6. $(x-4)^2$
7. *nelze rozložit*
8. $(x-0,6)(x-0,5)$
9. $(x+6)(x-5)$
10. $100(x+0,7)(x-1,8)$
11. $(3x+2)^2=9\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$
12. *nelze rozložit*
13. $20(x+0,6)(x+0,5)$
14. *nelze rozložit*
15. $(x-3) \quad x \neq 2$
16. $(x+0,6) \quad x \neq -0,5$
17. $\frac{x-0,2}{x+0,3} \quad x \neq -0,3 \wedge x \neq 0,1$
18. $\frac{(x-2)}{(x+1)} \quad x \neq \pm 1$
19. $\frac{(x-2)}{(x-1)} \quad x \neq 1$
20. $\frac{x+2}{x-\frac{1}{3}} \quad x \neq \frac{1}{3} \wedge x \neq -\frac{1}{2}$
21. $\frac{x-\sqrt{3}}{x} \quad x \neq \sqrt{3} \wedge x \neq 0$
22. *nelze zkrátit* $x \in \mathbb{R}$

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Rozklad kvadratického trojčlenu na součin
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_03
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	13. 03. 2013
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list výkladem, s řešenými modelovými příklady, se zadáním a řešením příkladů k procvičení rozkladu kvadratických členů.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	