



Opakování a rozšíření učiva ze ZŠ

Počítání z hlavy

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M1_114

20. 03. 2014

Mgr. Pavel Někvinda

Výklad, řešené ilustrační příklady a příklady s řešením. Je možno využít i jako pracovní listy.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Počítání z hlavy

Naučte se počítat rychle, přesně a z paměti.

Pro takové účely je dobré zautomatizovat si několik základních úloh (obdobně jako znáte malou násobilku) osvojit si několik drobných triček a fintiček.

Druhé mocniny do dvaceti

$$11^2 = 121$$

$$12^2 = 144$$

$$13^2 = 169$$

$$14^2 = 196$$

$$15^2 = 225$$

$$16^2 = 256$$

$$17^2 = 289$$

$$18^2 = 324$$

$$19^2 = 361$$

$$20^2 = 400$$

Některé další mocniny

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 9^2 = 81$$

$$5^3 = 125$$

$$7^3 = 343$$

Mocniny dvou

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

$$2^7 = 128$$

$$2^8 = 256$$

$$2^9 = 512$$

$$2^{10} = 1\ 024$$

Druhé mocniny čísel končících pětkou

Na počítání druhých mocnin čísel končících číslicí 5 existuje jednoduchý, ale účinný triček:

- Druhá mocnina čísla končícího na 5 končí číslicemi ...**25**
- Počet **stovek** druhé mocniny (**S**) se odvodí z počtu desítek (**D**) původního čísla

číslo: **D5**

D je počet desítek

druhá mocnina: **D5² = S25**

$$S = D \cdot (D + 1)$$

Příklad 1

Kolik je 75^2 ?

Je to snadné: **75**

$$S = 7 \cdot (7+1) = 56$$

$$75^2 = 5625$$

Příklad 2

Kolik je 105^2 ?

$$10 \cdot 11 = 110$$

$$105^2 = 11025$$

Kolik je 45^2 ?

$$4 \cdot 5 = 20$$

$$45^2 = 2025$$

$$15^2 = 225$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$25^2 = 625$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$35^2 = 1\ 225$$

$$3 \cdot 4 = 12$$

$$45^2 = 2\ 025$$

$$4 \cdot 5 = 20$$

$$55^2 = 3\ 025$$

$$5 \cdot 6 = 30$$

$$65^2 = 4\ 225$$

$$6 \cdot 7 = 42$$

$$75^2 = 5\ 625$$

$$7 \cdot 8 = 56$$

$$85^2 = 7\ 225$$

$$8 \cdot 9 = 72$$

$$95^2 = 9\ 025$$

$$9 \cdot 10 = 90$$

$$105^2 = 11\ 025$$

$$10 \cdot 11 = 110$$

$$115^2 = 13\ 225$$

$$11 \cdot 12 = 132$$

Násobení 11

K desetinásobku čísla (za číslo přepíšeme nulu) přičteme číslo samo.

$$E \cdot 11 = E \cdot 10 + E = E0 + E$$

$$12 \cdot 11 = 120 + 12 = 132$$

$$31 \cdot 11 = 310 + 31 = 341$$

$$57 \cdot 11 = 570 + 57 = 627$$

$$73 \cdot 11 = 730 + 73 = 803$$

Násobení číslem o jednu větším a o jednu menším

$$C \cdot (C + 1) = C^2 + C$$

$$C \cdot (C - 1) = C^2 - C$$

S výhodou využijeme v předešlém naučené tříčky.

$$12 \cdot 13 = 12^2 + 12 = 144 + 12 = 156$$

$$13 \cdot 12 = 13^2 - 13 = 169 - 13 = 156$$

$$13 \cdot 14 = 13^2 + 13 = 169 + 13 = 182$$

$$14 \cdot 13 = 14^2 - 14 = 196 - 14 = 182$$

$$14 \cdot 15 = 14^2 + 14 = 196 + 14 = 210$$

$$15 \cdot 14 = 15^2 - 15 = 225 - 15 = 210$$

$$15 \cdot 16 = 15^2 + 15 = 225 + 15 = 240$$

$$16 \cdot 15 = 16^2 - 16 = 256 - 16 = 240$$

$$16 \cdot 17 = 16^2 + 16 = 256 + 16 = 272$$

$$17 \cdot 16 = 17^2 - 17 = 289 - 17 = 272$$

$$17 \cdot 18 = 17^2 + 17 = 289 + 17 = 306$$

$$18 \cdot 17 = 18^2 - 18 = 324 - 18 = 306$$

$$18 \cdot 19 = 18^2 + 18 = 324 + 18 = 342$$

$$19 \cdot 18 = 19^2 - 19 = 361 - 19 = 342$$

$$25 \cdot 26 = 25^2 + 25 = 625 + 25 = 650$$

$$25 \cdot 24 = 25^2 - 25 = 625 - 25 = 600$$

$$35 \cdot 36 = 35^2 + 35 = 1225 + 35 = 1260$$

$$35 \cdot 34 = 35^2 - 35 = 1225 - 35 = 1190$$

$$45 \cdot 46 = 45^2 + 45 = 2025 + 45 = 2070$$

$$45 \cdot 44 = 45^2 - 45 = 2025 - 45 = 1980$$

$$55 \cdot 56 = 55^2 + 55 = 3025 + 55 = 3080$$

$$55 \cdot 54 = 55^2 - 55 = 3025 - 55 = 2970$$

$$65 \cdot 66 = 65^2 + 65 = 4225 + 65 = 4290$$

$$65 \cdot 64 = 65^2 - 65 = 4225 - 65 = 4160$$

$$75 \cdot 76 = 75^2 + 75 = 5625 + 75 = 5700$$

$$75 \cdot 74 = 75^2 - 75 = 5625 - 75 = 5550$$

$$85 \cdot 86 = 85^2 + 85 = 7225 + 85 = 7310$$

$$85 \cdot 84 = 85^2 - 85 = 7225 - 85 = 7140$$

$$95 \cdot 96 = 95^2 + 95 = 9025 + 95 = 9120$$

$$95 \cdot 94 = 95^2 - 95 = 9025 - 95 = 8930$$

$$105 \cdot 106 = 105^2 + 105 = 11025 + 105 = 11130$$

$$105 \cdot 104 = 105^2 - 105 = 11025 - 105 = 10920$$

Druhé mocniny

I počítání druhých mocnin přirozených čísel do sta z paměti je snadné. Stačí využít algebraické vzorce. Přidáme-li k tomu ještě trošku strategie a taktiky, zavrhnete svoji kalkulačku - máte-li ovšem jakou.

Co už umíme

$10^2, 20^2, 30^2, 40^2, 50^2, 60^2, 70^2, 80^2, 90^2, 100^2$

$15^2, 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 65^2, 75^2, 85^2, 95^2$

Co už víme

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Příklad 3

Kolik je 42^2 ?

$$42^2 = (40 + 2)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1600 + 160 + 4 = 1760 + 4 = 1764$$

Kolik je 46^2 ?

$$46^2 = (45 + 1)^2 = 45^2 + 2 \cdot 45 \cdot 1 + 1^2 = 2025 + 90 + 1 = 2115 + 1 = 2116$$

Kolik je 39^2 ?

$$39^2 = (40 - 1)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = 1600 - 80 + 1 = 1520 + 1 = 1521$$

Kolik je 43^2 ?

$$43^2 = (45 - 2)^2 = 45^2 - 2 \cdot 45 \cdot 2 + 2^2 = 2025 - 180 + 4 = 1845 + 4 = 1849$$

Rozbor

1. Každé číslo lze rozložit na vhodný součet (rozdíl) $A \pm B$
 - první člen (A) končí na ...0 nebo ...5
 - druhý člen (B) je 1 nebo 2
2. Pomocí vzorce mocninu součtu (rozdílu) rozložíme na postupné jednoduché úlohy
3. Druhou mocninu čísla končícího na ...0 nebo ...5 umíme snadno z hlavy určit A^2
4. Přičteme (odečteme) - počítáme v **řádu stovek** a následně **desítek** $\pm 2AB$
5. Přičteme 1 nebo 4 $+ 1$ nebo $+ 4$

Příklad 4

	$A \pm B$	$A^2 \pm 2 \cdot A \cdot B + B^2$		
	$A + 1$	$A^2 + 2 \cdot A + 1$		
21^2	$20 + 1$	$20^2 + 2 \cdot 20 + 1$	$400 + 40 + 1$	441
71^2	$70 + 1$	$70^2 + 2 \cdot 70 + 1$	$4900 + 140 + 1$	5041
26^2	$25 + 1$	$25^2 + 2 \cdot 25 + 1$	$625 + 50 + 1$	676
76^2	$75 + 1$	$75^2 + 2 \cdot 75 + 1$	$5625 + 150 + 1$	5776
	$A + 2$	$A^2 + 2 \cdot A \cdot 2 + 4$		
22^2	$20 + 2$	$20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 2 + 4$	$400 + 80 + 4$	484
72^2	$70 + 2$	$70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 2 + 4$	$4900 + 280 + 4$	5184
27^2	$25 + 2$	$25^2 + 2 \cdot 25 \cdot 2 + 4$	$625 + 100 + 4$	729
77^2	$75 + 2$	$75^2 + 2 \cdot 75 \cdot 2 + 4$	$5625 + 300 + 4$	5929
	$A - 2$	$A^2 - 2 \cdot A \cdot 2 + 4$		
23^2	$25 - 2$	$25^2 - 2 \cdot 25 \cdot 2 + 4$	$625 - 100 + 4$	529
73^2	$75 - 2$	$75^2 - 2 \cdot 75 \cdot 2 + 4$	$5625 - 300 + 4$	5329
28^2	$30 - 2$	$30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 2 + 4$	$900 - 120 + 4$	784
78^2	$80 - 2$	$80^2 - 2 \cdot 80 \cdot 2 + 4$	$6400 - 320 + 4$	6084
	$A - 1$	$A^2 - 2 \cdot A + 1$		
24^2	$25 - 1$	$25^2 - 2 \cdot 25 + 1$	$625 - 50 + 1$	576
74^2	$75 - 1$	$75^2 - 2 \cdot 75 + 1$	$5625 - 150 + 1$	5476
29^2	$30 - 1$	$30^2 - 2 \cdot 30 + 1$	$900 - 60 + 1$	841
79^2	$80 - 1$	$80^2 - 2 \cdot 80 + 1$	$6400 - 160 + 1$	6241

např.:

$$39^2 = (40 - 1)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 + 1 = 1600 - 80 + 1 = 1521$$

$$42^2 = (40 + 2)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 4 = 1600 + 160 + 4 = 1764$$

$$51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 + 1 = 2500 + 100 + 1 = 2601$$

$$68^2 = (70 - 2)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 2 + 4 = 4900 - 280 + 4 = 4624$$

$$44^2 = (45 - 1)^2 = 45^2 - 2 \cdot 45 + 1 = 2025 - 90 + 1 = 1936$$

$$83^2 = (85 - 2)^2 = 85^2 - 2 \cdot 85 \cdot 2 + 4 = 7225 - 340 + 4 = 6889$$

$$97^2 = (95 + 2)^2 = 95^2 + 2 \cdot 95 \cdot 2 + 4 = 9025 + 380 + 4 = 9409$$

$$66^2 = (65 + 1)^2 = 65^2 + 2 \cdot 65 + 1 = 4225 + 130 + 1 = 4356$$

Šikovní součiny

Některé součiny lze snadno vypočítat pomocí šikovného rozkladu a vzorce $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

Příklad 3

Kolik je $29 \cdot 31$?

$$29 \cdot 31 = (30 - 1)(30 + 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 889$$

$$63 \cdot 67 = (65 - 2)(65 + 2) = 65^2 - 2^2 = 3025 - 4 = 2021$$

$$54 \cdot 66 = (60 - 6)(60 + 6) = 60^2 - 6^2 = 3600 - 36 = 3564$$

$$28 \cdot 52 = (40 - 12)(40 + 12) = 40^2 - 12^2 = 1600 - 144 = 1456$$

Z příkladů je celý tříček asi zřejmý. Samozřejmě že činitelé musí být šikovná čísla, která mají šikovný střed. Někdy je rozklad patrný na první pohled. Potřebná čísla A a B lze ale najít i snadným výpočtem.

$$A = (X + Y) : 2$$

$$B = (X - Y) : 2$$

$$X \cdot Y = (A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

$$52 \cdot 28 = ?$$

$$(52 + 28) : 2 = 80 : 2 = 40$$

$$(52 - 28) : 2 = 24 : 2 = 12$$

$$52 \cdot 28 = 40^2 - 12^2 = 1600 - 144 = 1456$$

Cvičení

S použitím vzorců určete bez kalkulačky a písemného násobení

$16 \cdot 17 =$

$19 \cdot 18 =$

$12 \cdot 13 =$

$16 \cdot 15 =$

$14 \cdot 15 =$

$27 \cdot 11 =$

$15 \cdot 25 =$

$67 \cdot 73 =$

$39 \cdot 41 =$

$85 \cdot 95 =$

$52 \cdot 48 =$

$111 \cdot 109 =$

$46 \cdot 44 =$

$27 \cdot 23 =$

$74 \cdot 76 =$

$16 \cdot 14 =$

$23 \cdot 37 =$

$22 \cdot 28 =$

$55 \cdot 56 =$

$45 \cdot 44 =$

$35 \cdot 36 =$

$105 \cdot 106 =$

$25 \cdot 24 =$

$31 \cdot 11 =$

$22^2 =$

$31^2 =$

$49^2 =$

$99^2 =$

$101^2 =$

$504^2 =$

$999^2 =$

$37^2 =$

$52^2 =$

$76^2 =$

$68^2 =$

$53^2 =$

Řešení

A co kalkulačka?

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Opakování a rozšíření učiva ze ZŠ
Název	Počítání z hlavy
Číslo DUM	VY_42_inovace_M1_114
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	20. 03. 2014
Předmět	Matematika
Ročník	P1
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Výklad, řešené ilustrační příklady a příklady s řešením. Je možno využít i jako pracovní listy.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	