Funkce, rovnice a jejich užití

Užití goniometrických funkcí v trigonometrii

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M3_27

3. 3. 2014

Mgr. Pavel Nekvinda

Studijní materiál s vysvětlením základních pojmů, řešenými příklady a příklady s řešením.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Užití goniometrických funkcí v trigonometrii

Základní vlastnosti trojúhelníku

- Trojúhelníková nerovnost

  Součet velikostí každých dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí.

  $$a+b>c$$
  $$a+c>b$$
  $$b+c>a$$

- Vnitřní úhly

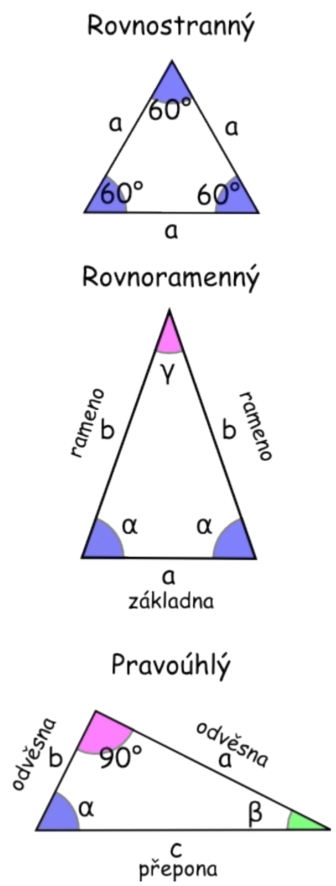
  Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je přímý úhel (resp. 180°, resp. π rad).

  $$\alpha+\beta+\gamma=180°$$
  $$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

- Jednoznačné určení trojúhelníku (věty)
  - *sss* jsou dány všechny tři strany
  - *sus* jsou dány dvě strany a úhel jimi sevřený
  - *usu* je dána strany a úhly k ní přilehlé
  - *Ssu* jsou dány dvě strany a úhel proti větší z nich

Zvláštní druhy trojúhelníků

- Rovnostranný
  - všechny tři strany jsou shodné
  - všechny tři vnitřní úhly jsou 60°
- Rovnoramenný
  - *ramena* (b), *základna* (a)
  - *ramena* jsou shodné strany
  - úhly při *základně* jsou shodné
- Pravoúhlý
  - *odvěsny* (a, b), *přepona* (c)
  - úhel proti *přeponě* je pravý
  - $c^2 = a^2 + b^2$ ....Pythagorova věta



Obr 1: Zvláštní typy trojúhelníků

Obecný trojúhelník

Obecný trojúhelník je libovolný trojúhelník – nemusí být osově ani středově souměrný ani žádný jeho vnitřní úhel nemusí být pravý.

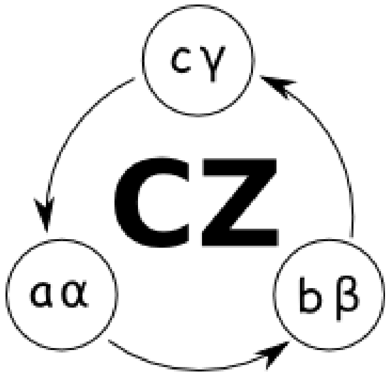
Rovnoramenný, rovnostranný a pravoúhlý trojúhelník jsou jen zvláštní případy obecného trojúhelníku. Není-li jisté, zda se jedná o některý ze zvláštních druhů trojúhelníku, je třeba s ním zacházet jako s obecným trojúhelníkem.

V obecném trojúhelníku platí *cyklická záměna – CZ*

Vztahy mezi stranami a úhly se nezmění změnou značení (viz Obr. 2)

V obecném trojúhelníku vyjadřují vztahy mezi velikostmi stran a úhlů dvě věty[1]

- Sinová věta
- Kosinová věta



Obr 2: Cyklická záměna

Sinová věta

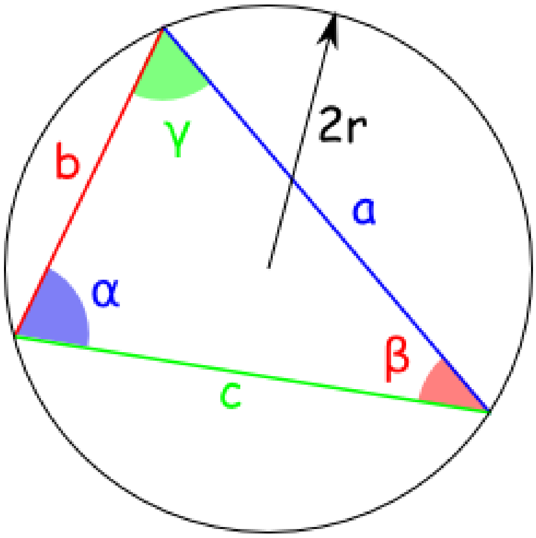
Poměr velikosti strany a sinu protilehlého úhlu je v trojúhelníku stálý.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r$$

Ze sinové věty mimo jiné plyne

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad CZ$$

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b} \qquad CZ$$

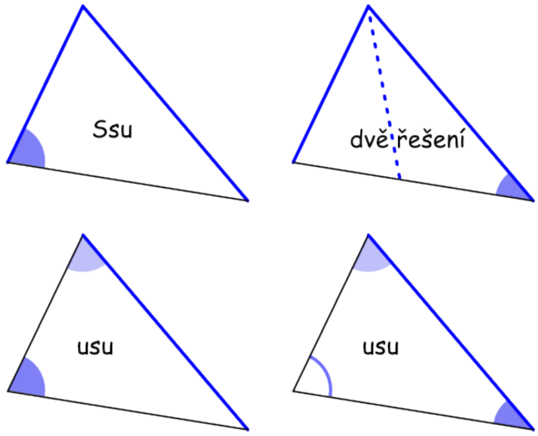


Obr 3: r ... poloměr kružnice opsané

1 *Pythagorova (ČÍ) věta* je pojmenována podle Pythagora ze Samu (6. stol. př. n. l.);
sinová (JAKÁ) věta je pojmenována podle funkce sinus; nikoli Sinova věta – žádný Sinus nežil; nikoli Synova věta – a kdo by potom byla jeho matka?
kosinová (JAKÁ) věta je pojmenována podle funkce kosinus; nikoli Kosinova věta – žádný Kosinus nežil, příjmení Kosina má v Čechách 895 občanů, ale nikdo z nich větu nevlastní; také nezaměňovat s větou Kozinovou: „Lomikare, Lomikare, zvu tě na boží súd..."

Použití sinové věty

1. dvě strany a úhel proti větší z nich
2. dvě strany a úhel proti menší z nich – **dvě řešení**
3. stranu a dva úhly
   známe-li dva úhly, je známe i úhel třetí:
   $\alpha+\beta+\gamma=180°$



Obr 4: Sinovou větou

Kosinová věta

Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:

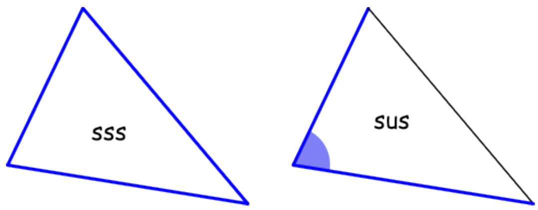
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \qquad CZ$$

Z kosinové věty mimo jiné plyne

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad CZ$$

Použití kosinové věty

1. tři strany
2. dvě strany a úhel jimi sevřený



Obr 5: Sinovou větou

Pythagorova věta je speciální případ kosinové věty pro $\gamma=90°$ (pravoúhlý trojúhelník)

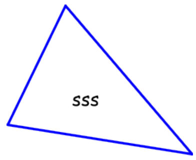
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=a^2+b^2-2ab\cos 90°=a^2+b^2-2ab\cdot 0=a^2+b^2$$

Řešení trojúhelníku[2]

Příklad 1

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno

$a=5$
$b=6$
$c=7$



$\alpha, \beta, \gamma = ?$

- Pomocí kosinové věty určíme **alespoň** jeden vnitřní úhel
- Druhý úhel lze následně určit
  - buď obdobně pomocí kosinové věty – použijeme cyklickou záměnu
  - nebo pomocí sinové věty
- Třetí úhel lze následně určit
  - buď obdobně pomocí kosinové věty – použijeme cyklickou záměnu
  - nebo pomocí sinové věty
  - nebo dopočítáním do přímého úhlu (180°, π)

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 7}=0{,}714285714$$

$$\alpha=44°24'55''$$

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{5^2+7^2-6^2}{2\cdot 5\cdot 7}=0{,}542857142$$

$$\beta=57°7'18''$$

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}=0{,}2$$

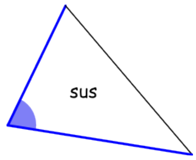
$$\gamma=78°27'47''$$

2 *Řešit trojúhelník* znamená jinými slovy určit velikosti všech jeho stran a úhlů

Příklad 2

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno

$\alpha = 60°$
$b = 6$
$c = 7$



$a, \beta, \gamma = ?$

- Pomocí kosinové věty určíme stranu *a*
- Druhý úhel lze následně určit
  - buď pomocí kosinové věty
  - nebo pomocí sinové věty
- Třetí úhel lze následně určit
  - buď obdobně pomocí kosinové věty
  - nebo pomocí sinové věty
  - nebo dopočítáním do přímého úhlu (180°, π)

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} = \sqrt{6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 60°} = \sqrt{43}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(\sqrt{43})^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot \sqrt{43} \cdot 7} = 0{,}609994281$$

$\beta = 52°24'39''$

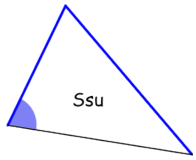
$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(\sqrt{43})^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot \sqrt{43} \cdot 6} = 0{,}381246425$$

$\gamma = 67°35'21''$

Příklad 3

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno

$\alpha = 30°$
$a = 7$
$b = 6$



$c, \beta, \gamma = ?$

Úhel proti **delší** straně

- Pomocí sinové věty určíme úhel β
- Třetí úhel γ následně určíme dopočítáním do přímého úhlu (180°, π)
- Třetí stranu c lze následně dopočítat
  - buď pomocí kosinové věty
  - nebo pomocí sinové věty

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad \Rightarrow$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{6}{7} \cdot \sin 30° = 0{,}428571428$$

$$\beta = 25°22'37''$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (30° + 25°22'37'') = 124°37'23''$$

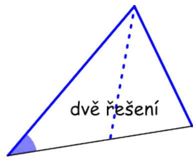
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow$$

$$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 7\frac{\sin 124°37'23''}{\sin 30°} = 11{,}52$$

Příklad 4

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno

$\alpha = 30°$
$a = 5$
$b = 6$



$c, \beta, \gamma = ?$

Úhel proti **kratší** straně – **dvě řešení**

- Pomocí sinové věty určíme úhly β, β'
- Třetí úhly γ, γ' následně určíme dopočítáním do přímého úhlu (180°, π)
- Třetí strany c, c' lze následně dopočítat
  - buď pomocí kosinové věty
  - nebo pomocí sinové věty

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad \Rightarrow$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{6}{5} \cdot \sin 30° = 0{,}6$$

$$\beta = 36°52'12''$$

$$\beta' = 180° - \beta = 180° - 36°52'12'' = 143°7'48''$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (30° + 36°52'12'') = 113°7'48''$$

$$\gamma' = 180° - (\alpha + \beta') = 180° - (30° + 143°7'48'') = 6°52'12''$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow$$

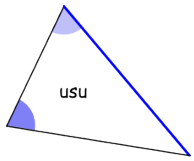
$$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 5\frac{\sin 113°7'48''}{\sin 30°} = 9{,}20$$

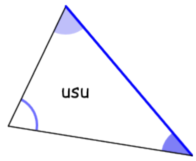
$$c' = a\frac{\sin\gamma'}{\sin\alpha} = 5\frac{\sin 6°52'12''}{\sin 30°} = 1{,}20$$

Příklad 5

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno

$a=5$
$\alpha=30°$
$\gamma=70°$





$a, \alpha, \gamma = ?$

- Třetí úhel určíme dopočítáním do přímého úhlu (180°, π)
- Druhou stranu určíme pomocí sinové věty
- Třetí stranu lze následně dopočítat
  - buď pomocí kosinové věty
  - nebo pomocí sinové věty

$$\beta=180°-(\alpha+\gamma)=180°-(30°+70°)=80°$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \quad \Rightarrow$$

$$b=a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=5\frac{\sin 80°}{\sin 30°}=9{,}85$$

$$c=a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=5\frac{\sin 70°}{\sin 30°}=9{,}40$$

Praktické trigonometrické úlohy

Řešení obecného trojúhelníku má v praxi velmi široké užití. Pomocí trojúhelníku zeměměřiči změřili celý svět - výšky hor na které nebylo třeba vyšplhat, vzdálenosti, které nebylo třeba překonat. Pomocí trojúhelníků astronomové měří vzdálenosti hvězd. Počítačová grafika není nic jiného než trojúhelník vedle trojúhelníku.

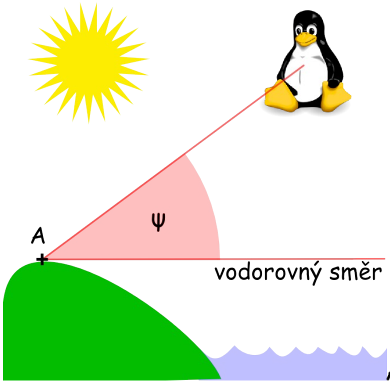
Pojmy v příkladech

Zorný úhel - z bodu A je vidět parta tučňáků pod zorným úhlem φ

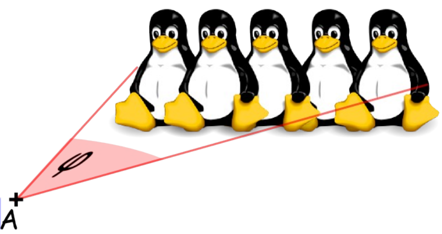
Výškový úhel - Tučňák Tux vzhledem k bodu A levituje ve výškovém úhlu ψ

Hloubkový úhel - Tučňák Tux vzhledem k bodu A plove v hloubkovém úhlu ω

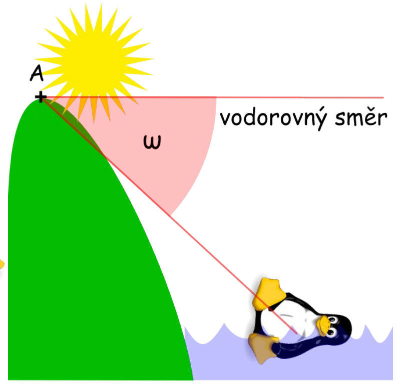
Paralaxa - je v astronomii úhel π, o který se na obloze nebeské těleso posune, je-li pozorováno z krajových bodů vhodně zvolené základny[3].



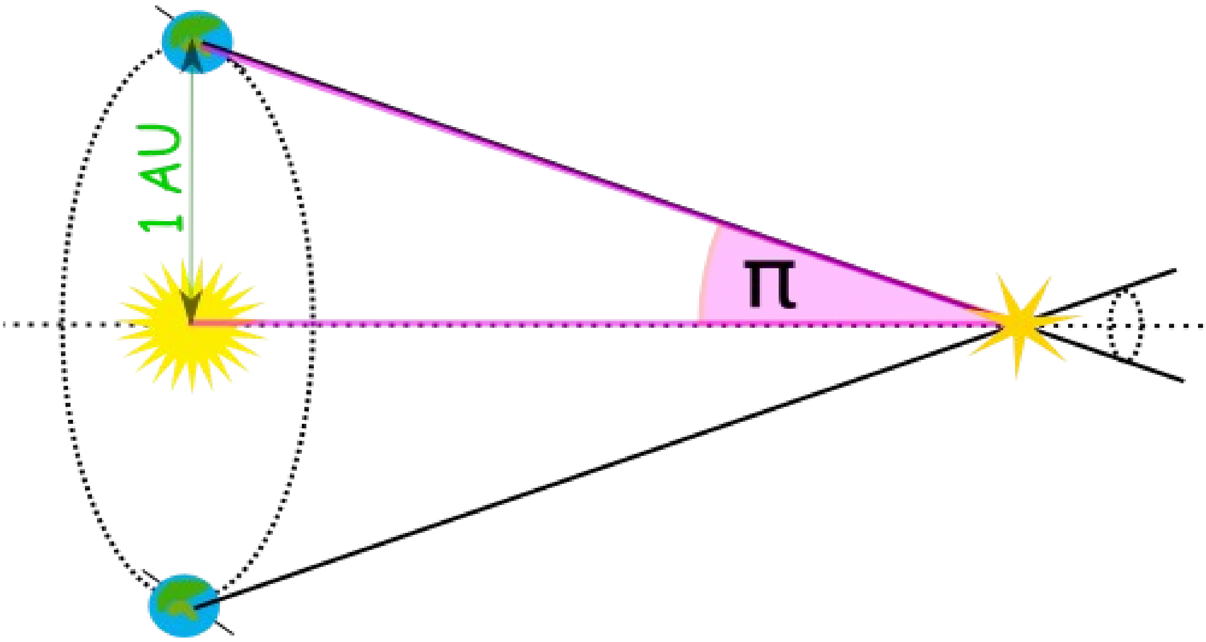
Obr 6: Výškový úhel



Obr 8: Zorný úhel



Obr 7: Hloubkový úhel

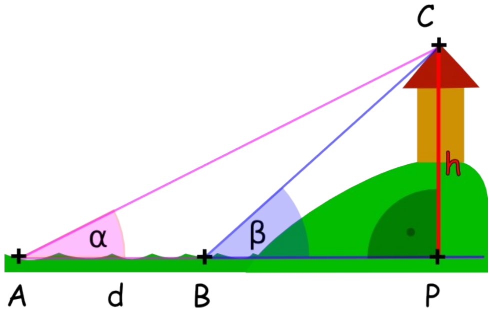


Obr 9: Paralaxa

3 Výpočet paralaxy se používá hlavně pro měření vzdáleností objektů ve vesmíru. Pro měření vzdáleností objektů ve sluneční soustavě se jako základna používá poloměr Země, pro měření vzdáleností hvězd se používá poloměr oběžné dráhy Země (vzdálenost Země–Slunce)

Příklad 6

Z místa *A* je vidět vrchol věže pod výškovým úhlem *α* a z místa *B* pod výškovým úhlem *β*. Vzdálenost míst *A* a *B* je *d*. Určete vížky výšku *h*.



$\alpha = 30°$
$\beta = 70°$
$d = |AB| = 100$

$h = ?$

- β' při vrcholu *B* $\beta' = 180° - \beta$

v ΔABC:

- $\delta = 180° - (\alpha + \beta') = 180° - (\alpha + 180° - \beta) = 180° - \alpha - 180° + \beta = \beta - \alpha$
- $\frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\delta} \quad \Rightarrow$

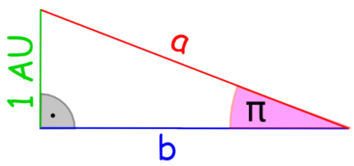
  $|BC| = d\frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = d\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$

v ΔBPC:

- $\frac{h}{|BC|} = \sin\beta \quad \Rightarrow$
- $h = |BC| = d\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\cdot\sin\beta = 100\frac{\sin 30°\cdot\sin 70°}{\sin(70° - 30°)} = 73$

Příklad 7

Určete vzdálenost[4] hvězdy *Proxima Centauri*, jejíž paralaxa je 0,772".



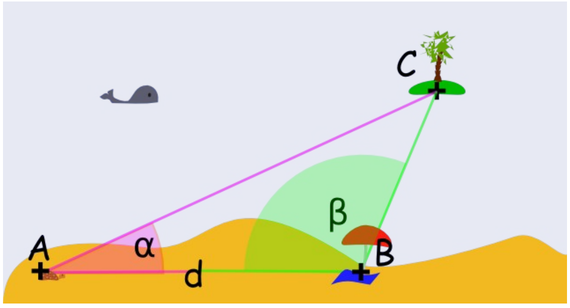
$\frac{1\,AU}{a} = \sin\pi \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1\,AU}{\sin 0{,}772''} = 267182\,AU$

$\frac{1\,AU}{b} = \text{cotg}\,\pi \quad \Rightarrow \quad b = 1\,AU\cdot\text{cotg}\,0{,}772'' = 267182\,AU$

4 1 AU (astronomická jednotka) je střední vzdálenost Země-Slunce, což je 149 597 870 km.

Příklad 7

Určete jak daleko je z vašeho místečka na pláži (bodu B) na ostrůvek (bod C), neumíte-li plavat, ale počítat ano.



- Nalezněte nějaké význačné nehybné a dostupné místo, např. želvu (bod A)
- Změřte (odkrokujte) vzdálenost bodů A a B – 1 krok = 0,75 m
- Změřte úhly α a β – natáhnete-li před sebe ruku, pak sevřená pěst vymezuje zorný úhel 10 °

$\alpha = 30°$
$\beta = 135°$
$d = |AB| = 50$

$|BC| = ?$

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 15°$

$$\frac{50}{\sin 15°} = \frac{|BC|}{\sin 30°}$$

$$|BC| = 50 \frac{\sin 30°}{\sin 15°}$$

$$|BC| = 50 \frac{0{,}5}{0{,}25} = 100 \quad (kalkulačka\, 96{,}6)$$

$\sin 15° = \sin(45° - 30°) =$
$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$
$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) \approx$
$\frac{1{,}4}{4}(1{,}7 - 1) \approx 0{,}25 \quad (kalkulačka\, 0{,}258819045)$

Z našeho místečka na pláži je na ostrůvek dvakrát dál než k želvě.

Sbírka

I. Řešte trojúhelník *ABC* (určete velikosti stran a vnitřních úhlů)

1. $a=65\,;b=46\,;\alpha=42°35'$

2. $b=13{,}4\,;c=16{,}3\,;\gamma=70°12'$

3. $a=40\,;\alpha=26°38'\,;\beta=89°40'$

4. $b=79{,}5\,;\beta=65°20'\,;\gamma=54°40'\,;$

5. $a=7\,;b=4\,;\gamma=38°$

6. $a=10{,}9\,;c=15{,}2\,;\beta=67°$

7. $a=16\,;b=25\,;c=36$

8. $a=5\,;b=6\,;c=7$

II. V jakém zorném úhlu se jeví předmět 70 m dlouhý pozorovateli, který je od jednoho jeho konce vzdálen 50 m a od druhého konce 80 m.

III. Na vrcholu kopce stojí rozhledna 35 m vysoká. Patu i vrchol vidíme z určitého místa v údolí pod výškovými úhly o velikosti $\alpha = 28°$ a $\beta = 31°$. Jak vysoko je vrchol kopce nad rovinou pozorovacího místa?

IV. Na břehu řeky stojí budova, z jejichž dvou nad sebou umístěných oken ve vzdálenosti 12 m je vidět bod na druhém břehu (v rovině kolmé ke směru řeky) v hloubkových úhlech o velikosti $\alpha = 37°57'$ a $\beta = 25°26'$. Vypočtěte šířku řeky.

V. Cíl C je pozorován ze dvou dělostřeleckých pozorovatelen A, B, které jsou od sebe vzdáleny 975 m, přitom je $|\sphericalangle BAC| = 63°$, $|\sphericalangle ABC| = 48°$. Vypočítejte vzdálenost $|AC|$.

Řešení

I
1) $\beta=28°37'$; $\gamma=108°48'$; $c=90{,}9$
2) $\alpha=59°8'$; $\beta=50°40'$; $a=14{,}9$
3) $\gamma=63°42'$; $b=89{,}2$; $c=80{,}0$
4) $\alpha=60°$; $a=75{,}8$, $c=71{,}4$
5) $\alpha=109°23'$; $\beta=32°37'$; $c=4{,}6$
6) $\alpha=42°31'$; $\gamma=70°29'$; $b=14{,}8$
7) $\alpha=22°20'$; $\beta=36°25'$; $\gamma=121°15'$
8) $\alpha=22°20'$; $\beta=36°25'$; $\gamma=121°15'$

II 60°

III 269 m

IV 39,43 m

V 776 m

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

File:Tux.svg. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2014-02-21].

Paralaxa (astronomie). In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2014-03-21]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Paralaxa_(astronomie)

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Užití goniometrických funkcí v trigonometrii
Číslo DUM	VY_42_inovace_M3_27
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	3. 3. 2014
Předmět	Matematika
Ročník	P3
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Studijní materiál s vysvětlením základních pojmů, řešenými příklady a příklady s řešením.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	