Funkce, rovnice a jejich užití

Řešení pravoúhlého trojúhelníku goniometrickými funkcemi

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M3_26

27. 2. 2014

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list se základními vzorci, zadáním úloh a jejich řešením.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*

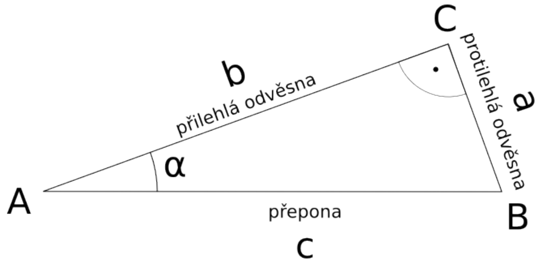
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení pravoúhlého trojúhelníkugoniometrickými funkcemi

Pravoúhlý trojúhelník

Z poměrů v pravoúhlém trojúhelníku pro vnitřní úhly a strany plyne:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

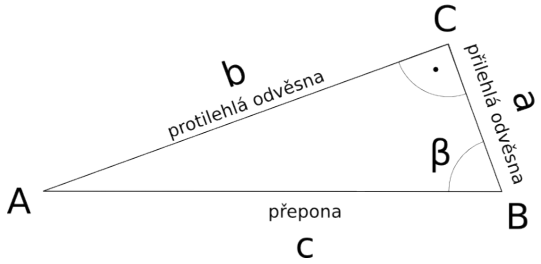


$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\cos\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\beta$$

$$tg\,\alpha=\frac{a}{b}=cotg\,\beta$$

$$cotg\,\alpha=\frac{b}{a}=tg\,\beta$$



Pro strany **pravoúhlého** trojúhelníku platí *Pythagorova věta*

$$c^2=a^2+b^2$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

Historická poznámka

Goniometrické funkce ostrého úhlu pravoúhlého trojúhelníku dobře znali a hojně v praxi používali v antickém Řecku již ve druhém století před naším letopočtem. Určovali čas pomocí tyče vrhající stín určité délky, zjišťovali výšku pyramidy porovnáváním délky jejího stínu s délkou stínu, který vrhala vhodná tyč

V patnáctém století byly goniometrické funkce definovány přes pravoúhlé trojúhelníky namísto tětiv kružnic. Velké uplatnění v astronomii a kartografii a potřeba stále přesnějších tabulek motivovaly mnohé k hlubším zkoumáním.

Příklad 1

Určete obsah pravoúhlého trojúhelníku *ABC*, jestliže je dána velikost přepony $c = 24$ m a úhel $\alpha = 70°$.

$\triangle ABC$

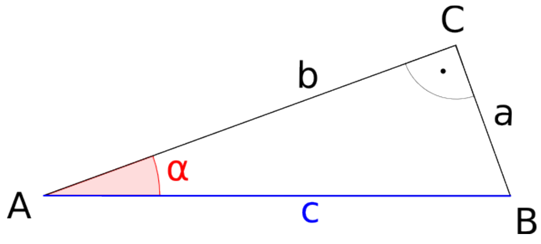
$c = 24$ m

$\alpha = 70°$

$S = ?$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}$$



$$b=c\cdot\cos\alpha$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}c\cdot\cos\alpha\cdot c\sin\alpha=\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\cdot 24^2\sin 70°\cdot\cos 70°=92{,}56$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku *ABC* je 92,56 m^2.

Sbírka

I. Řešte pravoúhlý trojúhelník *ABC* (určete velikosti stran a vnitřních úhlů)

1. $\gamma = 90°; \alpha = 50°20'; c = 120$

2. $\gamma = 90°; \beta = 42°40'; c = 8{,}3$

3. $\gamma = 90°; \alpha = 59°30'; a = 240$

4. $\gamma = 90°; \beta = 42°40'; a = 9{,}4$

5. $\gamma = 90°; \alpha = 37°10'; b = 172$

6. $\gamma = 90°; \beta = 42°40'; b = 16{,}7$

II. Řešte pravoúhlý trojúhelník *ABC*

1. $\gamma = 90°; S = 224{,}46\,m^2; a = 25{,}8\,m$

2. $\gamma = 90°; S = 0{,}14355\,m^2; \alpha = 35°\,20'$

3. $\gamma = 90°; S = 65{,}379\,m^2; \alpha = 66°\,30'$

III. Jaký je sklon žebříku délky 8,9 m, který je svým horním okrajem opřen o okraj zdi vysoké 8,4 m.

IV. Žebřík 8,5 m dlouhý je umístěn ve studni a svým dolním koncem vzdálen 0,9 m od stěny studně. Horní část žebříku je opřena o stěnu studně. Jak velký úhel svírá žebřík se dnem studně?

V. Průměrný úhel stoupání letadla je 11°20' a jeho průměrná rychlost je 450 $km \cdot h^{-1}$. \jak vysoko letadlo vystoupí za 5,5 min^{-1}.

VI. Jak vysoká je budova, která na vodorovnou dlažbu vrhá stín dlouhý 50,5 m pod úhlem 54°21'.

Řešení

I
1) $\beta = 39°40, a = 92, b = 77$
2) $\alpha = 47°20, a = 6{,}1, b = 5{,}6$
3) $\beta = 30°30, b = 141, c = 279$
4) $\alpha = 26°10', b = 19{,}1, c = 21{,}3$
5) $\beta = 52°50', a = 130, b = 216$
6) $\alpha = 21°40', a = 6{,}6, b = 18{,}0$

II
1) $\alpha = 56°, \beta = 34°, b = 17{,}4, c = 31{,}1$
2) $\beta = 54°40', a = 045, b = 0{,}64, c = 0{,}78$
3) $\alpha = 23°30', a = 7{,}5, b = 17{,}3, c = 18{,}9$

III 70°40'

IV 83°55'

V 8 106 m

VI 70,4 m

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.