



Funkce, rovnice a jejich užití

## Goniometrické vzorce – sbírka

Digitální učební materiál

VY\_42\_inovace\_M3\_25

23. 1. 2014

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list se základními vzorci, zadáním úloh a jejich řešením.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*  
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Goniometrické vzorce - sbírka

Z poměrů v pravoúhlém trojúhelníku plyne:

$$Ia) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$Ib) \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$Ic) \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1 \quad \text{pro } x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Z poměrů na jednotkové kružnici plyne:

$$IIa) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Sinus (kosinus) součtu (rozdílu)

$$IIIa) \quad \sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \sin y$$

$$IIIb) \quad \sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \sin y$$

$$IIIc) \quad \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y$$

$$IIId) \quad \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \sin y$$

Z IIIa) a IIIc) přímo plyne sinus (kosinus) dvojnásobného argumentu

Sinus (kosinus) polovičního argumentu

$$IVa) \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x \quad VIa) \quad \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$IVb) \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad VIb) \quad \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Součet (rozdíl) sinů (kosinů)

$$Va) \quad \sin x + \sin y = 2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$Vb) \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$Vc) \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$Vd) \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

**Sbírka**

I. Zjednodušte užitím součtových vzorců:

1.  $\sin(x+y) + \sin(x-y)$

2.  $\cos(x+y) - \cos(x-y)$

3.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

4.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

5.  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

6.  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

II. Pomocí součtových vzorců vypočítejte:

1.  $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ =$

2.  $2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ =$

III. Dokažte, že pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$  platí:

1.  $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin 2x - \sin 2y$

2.  $\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos 2x + \cos 2y - 1$

3.  $\cos x + \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) = 0$

IV. Vyjádřete uvedené výrazy pomocí  $\operatorname{tg} x$  a  $\operatorname{tg} y$

1.  $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$

$$2. \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$$

$$3. \frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}$$

$$4. \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{\sin(x+y)-\sin(x-y)}$$

V. Určete bez použití tabulek a kalkulačky

1.  $\sin 75^\circ$

2.  $\cos 165^\circ$

3.  $\sin 165^\circ$

**Řešení**

- I 1)  $2 \sin x \cos y$       2)  $-2 \sin x \sin y$       3) 0      4)  $-2 \sin x$   
5)  $\cos x$       6)  $\sin x$
- II 1) 1      2) 0
- III platí pro  $x, y \in R$
- IV 1)  $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}$       2)  $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$       3)  $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$       4)  $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}$
- V 1)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$       2)  $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$       3)  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$