Funkce, rovnice a jejich užití

Logaritmická funkce a logaritmus

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_12

03. 06. 2013

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list s vysvětlením a grafy jednotlivých typů logaritmických funkcí.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logaritmická funkce a logaritmus

V předchozím jsme se zmínili o tom, že mnoho přírodních probíhá v exponenciálních závislostech. S tím úzce souvisí i závislosti logaritmické. Na principu logaritmických závislostí fungují např. lidské smysly (sluch, zrak), určování kyselin a zásad (pH) nebo Richterova stupnice pro určování síly zemětřesení. Pro výpočty v technických oborech se ještě v sedmdesátých letech 20. století běžně používalo logaritmické pravítko[1].

Exponenciální a logaritmická funkce se k sobě mají obdobně jako sčítání a odčítání nebo umocňování a odmocňování. Hodně špatně řečeno: *tam a zpět*. Pro názornost si představíme funkce jako otázky a odpovědi na ně. Ukážeme si to na konkrétních příkladech.

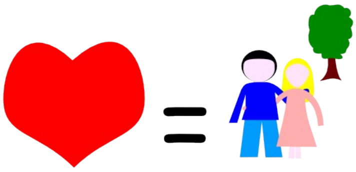
Exponenciální funkce $f: y = a^x$:

Kolik (y) je 10 (a) na 3 (x)? $10^3 = 1000$

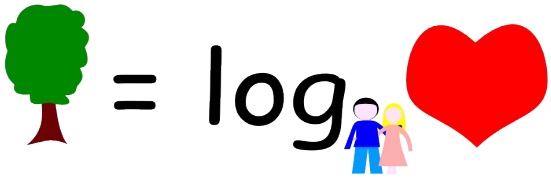
Logaritmická funkce $g: y = \log_a x$:

Na kolikátou (y) jsme umocnili 10 (a), jestliže je to 1 000 (x)? $\log_{10} 1000 = 3$

Pomoci může také poetická mnemotechnická hříčka[2]:



„Láska jsou dva na život (a na smrt).“



„Život je logaritmus lásky o základu dva.“

To, co je pro exponenciální funkci *f* definičním oborem *D(f)* – *na ose x*, je pro logaritmickou funkci *g* se stejným základem oborem hodnot *H(g)* – *na ose y*; *A* to, co je pro exponenciální funkci *f* oborem hodnot *H(f)*, je pro logaritmickou funkci *g* se stejným základem definičním oborem *D(g)*.

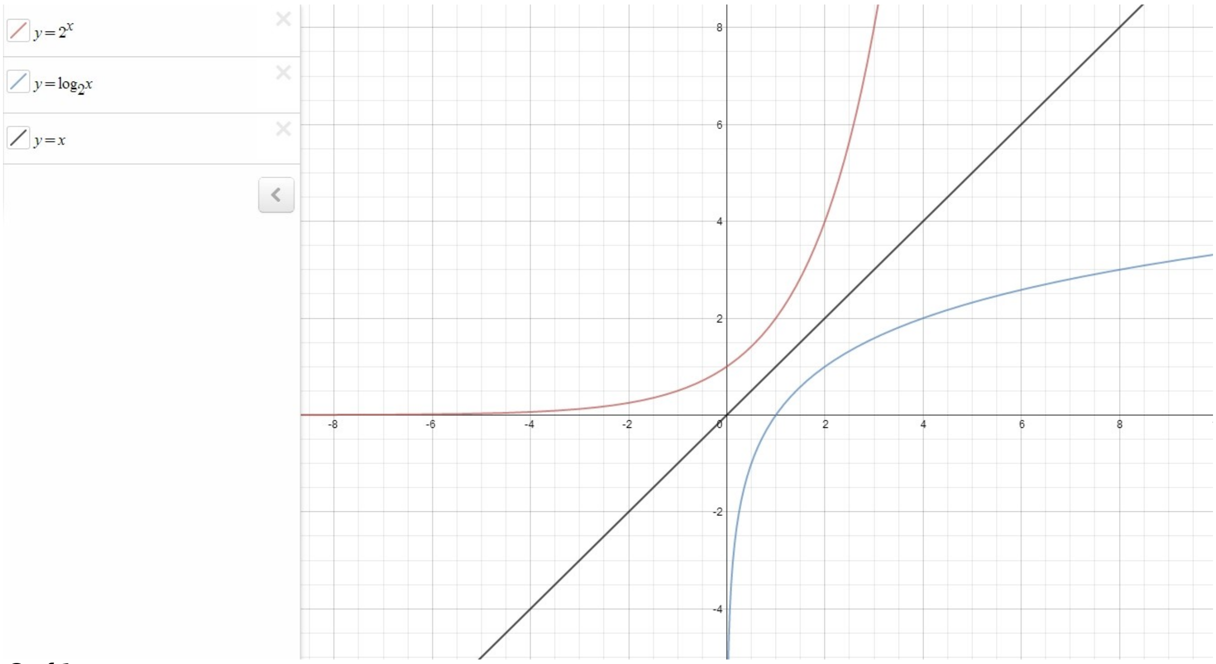
Exponenciální a logaritmická funkce se stejným základem mají v grafu „prohozené“ osy[3]; grafy jsou souměrné podle osy I. a III. kvadrantu. Dvojici takových funkcí nazýváme **funkce a funkce inverzní*.*** V některé literatuře se k funkci *f* inverzní funkce značí (poněkud matoucím způsobem[4]) f^{-1}.

1 Přenosné bateriemi napájené počítací stroje schopné vykonat základní početní operace i s velkými čísly – kalkulačky byly širší (i odborné) veřejnosti dostupné během první poloviny 80. let 20. století. Nahradily do té doby nezbytné matematické tabulky a logaritmická pravítka.

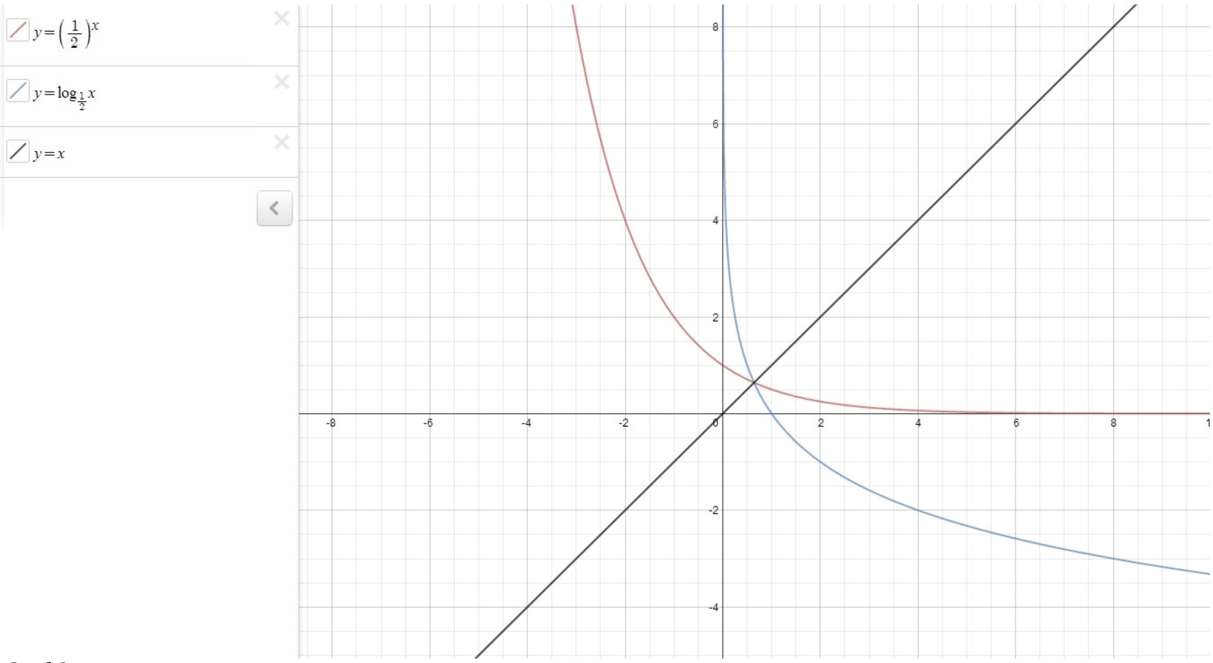
2 Použito v čtyřdílném seriálu ostravského studia ČST *Logaritmus lásky* z roku 1985

3 Jestliže osa x (jedna přímka) přejde na osu y (druhá přímka) a opačně, jedná se o osovou souměrnost; osa souměrnosti je osou I. a III. Kvadrantu (*y=x*).

4 Velice často bývá na kalkulačkách použito takové značení pro práci s goniometrickými funkcemi. Např.: známe-li velikost úhlu 30°, pro výpočet sinu tohoto úhlu použijeme *sin 30°* → 0,5; známe-li sinus úhlu 0,5, pro výpočet velikosti úhlu použijeme inverzní funkci $\sin^{-1} 0{,}5$ → 30°;
POZOR: obdobnou symboliku ale používáme i pro práci s mocninami: $2^{-1} = 0{,}5$ a $0{,}5^{-1} = 2$


$y = 2^x$
$y = \log_2 x$
$y = x$
8
6
4
2
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
-2
-4

Graf 1


$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$y = x$
8
6
4
2
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
-2
-4

Graf 2

Logaritmická funkce je každá funkce, ke které lze najít elementární funkci ve tvaru:

$f: y = \log_a x$

kde $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$ (kladné reálné číslo různé od jedné), které nazýváme **základ**.

Logaritmická funkce je **inverzní** funkce k exponenciální funkci se stejným základem.

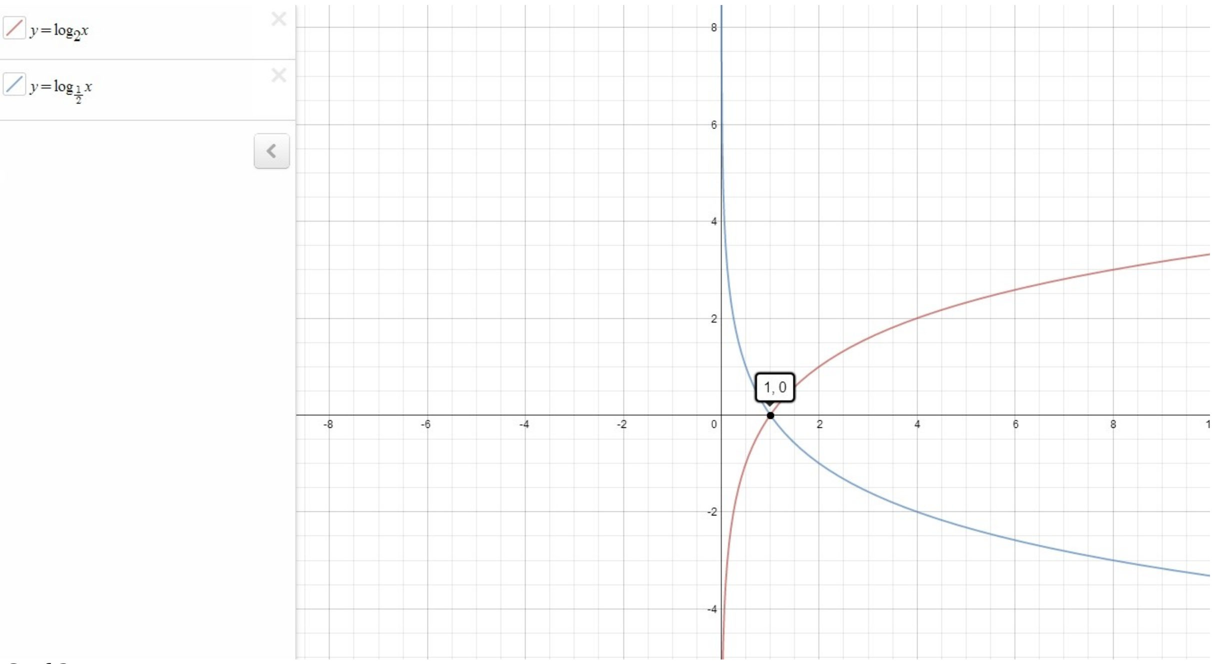
$\log_a x$ čteme: *„logaritmus x o základu a"*

Důležité logaritmy

Dekadický logaritmus	$\log x = \log_{10} x$	základ *10*	čteme: *„dekadický logaritmus x"*
Přirozený logaritmus	$\ln x = \log_e x$	základ *e*	čteme: *„přirozený logaritmus x"*

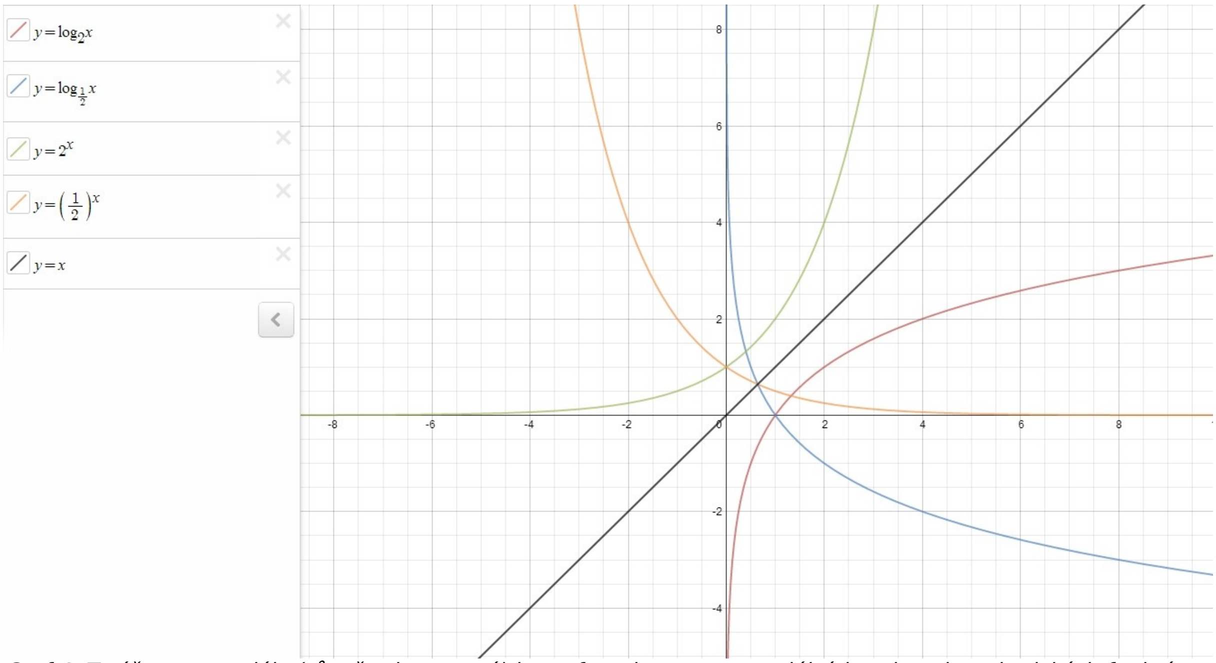
Vlastnosti $f: y = \log_a x$

- Definiční obor $D(f) = (0;\infty)$
- Obor hodnot $H(f) = \mathbb{R}$
- Funkce je **prostá**
- Pro základ $a \in (1;\infty)$ je **rostoucí**
- Pro základ j $a \in (0;1)$ je **klesající**
- Graf: **exponenciála**
  - *asymptota* – je vždy jedna a rovnoběžná s ***osou y***
  - *Význačný bod:* **[1;0]**



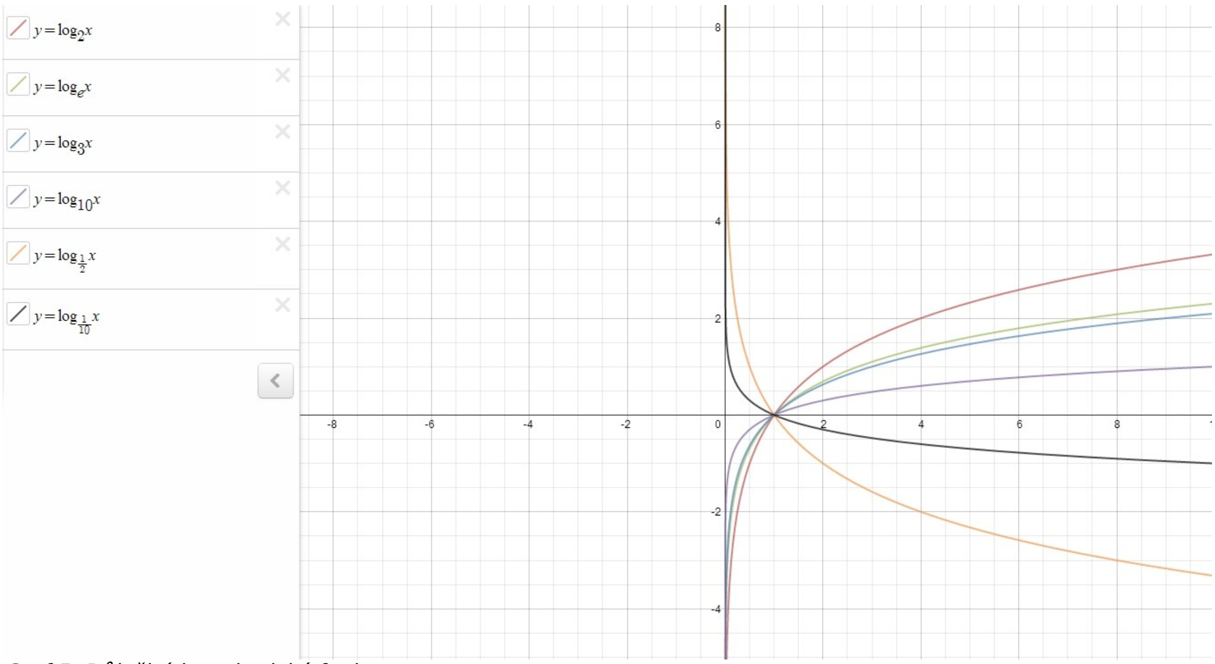
Graf 3

Barevně vyznačte funkční předpisy a grafy jednotlivých funkcí.



Graf 4: Tatáž exponenciála (různě orientovaná) je grafem dvou exponenciálních a dvou logaritmických funkcí

Barevně vyznačte funkční předpisy a grafy jednotlivých funkcí.



Graf 5: Důležité logaritmické funkce

Příklad 1

Určete

$\log_2 1\,024=$

$\log_4 1\,024=$

$\log_{32} 1\,024=$

$\log_2 8=$

$\log_2 \frac{1}{64}=$

$\log_4 \frac{1}{64}=$

$\log_{\frac{1}{2}} 1\,024=$

$\log_{\frac{1}{4}} 1\,024=$

$\log_{\frac{1}{32}} 1\,024=$

$\log_{\frac{1}{2}} 8=$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}=$

$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}=$

Řešení:

$\log_2 2^{10}=10$

$\log_4 4^5=5$

$\log_{32} 32^2=2$

$\log_2 2^3=3$

$\log_2 \frac{1}{64}=\log_2 (64)^{-1}=\log_2 (2^6)^{-1}=\log_2 2^{-6}=-6$

$\log_4 \frac{1}{64}=\log_4 (64)^{-1}=\log_4 (4^3)^{-1}=\log_4 4^{-3}=-3$

$\log_{\frac{1}{2}} 1\,024=\log_{\frac{1}{2}} 2^{10}=\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-10}=-10$

$\log_{\frac{1}{4}} 4^5=-5$

$\log_{\frac{1}{32}} 1\,024=-2$

$\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}=6$

$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}=3$

Příklad 2

Určete

$\log 1\,000=$

$\log 1\,000\,000=$

$\log 10^{15}=$

$\log 100=$

$\log \frac{1}{1\,000}=$

$\log 0{,}000\,001=$

$\log 10^{-23}=$

Řešení:

$\log 1\,000=\log 10^3=3$

$\log 1\,000\,000=\log 10^6=6$

$\log 10^{15}=15$

$\log 100=2$

$\log \frac{1}{1\,000}=\log 10^{-3}=-3$

$\log 0{,}000\,001=\log 10^{-5}=-5$

$\log 10^{-23}=-23$

Příklad 3

Určete

$\log_5 625=$

$\log_{25} 625=$

$\log_5 \sqrt{5}=$

$\log_7 \frac{1}{49}=$

$\log_3 81=$

$\log_9=81$

$\log_{12}=144$

$\log_2 \sqrt[3]{4}=$

$\log_2 16^3=$

Řešení:

$\log_5 625=\log_5 25^2=\log_5 (5^2)^2=\log_5 5^4=4$

$\log_{25} 25^2=2$

$\log_5 \sqrt{5}=\log_5 5^{0,5}=0{,}5$

$\log_7 \frac{1}{49}=\log_7 \frac{1}{7^2}=-2$

$\log_3 81=4$

$\log_9 81=2$

$\log_{12} 144=2$

$\log_2 \sqrt[3]{4}=\log_2 (2^2)^{\frac{1}{3}}=\log_2 2^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

$\log_2 16^3=\log_2 (2^4)^3=\log_2 2^{12}=12$

Určit některé logaritmy není obtížné (viz Příklad 1 až 3). K vyčíslení obtížnějších logaritmů se dříve používaly matematické tabulky, dnes máme práci díky kalkulačkám mnohem snazší. Novější kalkulačky poskytují plný komfort (lze na nich volit libovolné základy logaritmů); starší stroje měly k dispozici funkce pro přímé počítání s dekadickými a přirozenými logaritmy (pro zručnějšího počtáře celkem dostatečná výbava – logaritmy s různými základy lze mezi sebou přepočítat).

Příklad 4

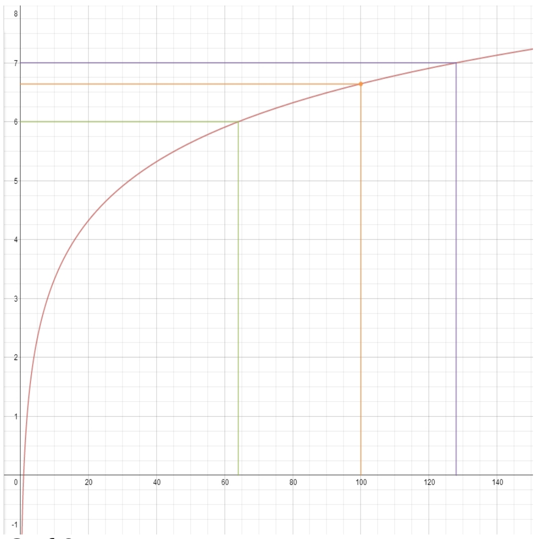
Určete přibližně:

$$\log_2 100 =$$
$$\log_3 100 =$$
$$\log_4 100 =$$
$$\log_5 100 =$$
$$\log 100 =$$

Řešení: bez kalkulačky se pokusíme určit mezi kterými celými čísly leží příslušné logaritmy.

a) $\log_2 100$

$6 = \log_2 2^6 = \log_2 64 < \log_2 100 < \log_2 128 = \log_2 2^7 = 7$



Graf 6

b) $\log_3 100$

$4 = \log_3 3^4 = \log_3 81 < \log_3 100 < \log_3 243 = \log_3 3^5 = 5$

c) $\log_4 100$

$3 = \log_4 2^3 = \log_4 64 < \log_4 100 < \log_4 256 = \log_4 2^4 = 4$

d) $\log_5 100$

$2 = \log_5 2^2 = \log_5 25 < \log_5 100 < \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

e) $\log 100$

$\log 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

Přesnější hodnoty lze získat pomocí kalkulačky, ale to až příště.

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Webová aplikace https://www.desmos.com/calculator

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Logaritmická funkce a logaritmus
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_12
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	03. 06. 2013
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list s vysvětlením a grafy jednotlivých typů logaritmických funkcí.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	