



Funkce, rovnice a jejich užití

## Kvadratická rovnice

Digitální učební materiál

VY\_42\_inovace\_M2\_32

17. 03. 2014

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní list se zadáním a řešením jednotlivých typů kvadratických rovnic.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*  
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Kvadratická rovnice

Kvadratická rovnice je každá rovnice, která je zapsaná nebo ji lze zapsat ve tvar:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

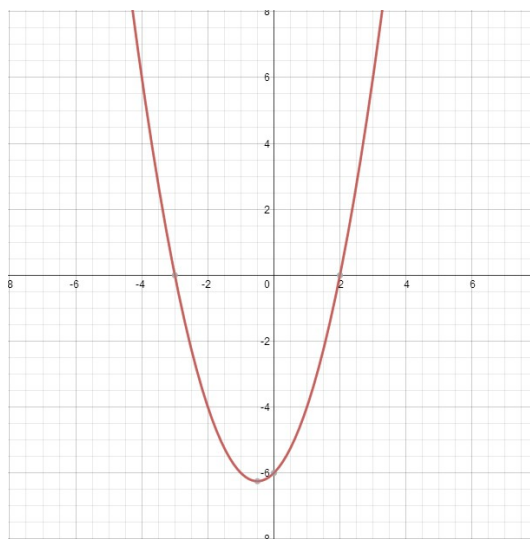
Algebraické řešení kvadratické rovnice  $ax^2+bx+c=0$  vyplývá z jasné představy související kvadratické funkce  $y=ax^2+bx+c$ .

### Příklad 1

Řešte kvadratickou rovnici  $x^2+x-6=0$ .

Graf související funkce  $y=x^2+x-6$  **protíná** osu  $x$  v bodech, kde  $f(x)=0$ , což jsou kořeny kvadratické rovnice  $x^2+x-6=0$ ; v našem případě to jsou body **-3** a **2**.<sup>1</sup>

Řešením rovnice jsou  $x_1=-3$   
 $x_2=2$ .



Graf 1

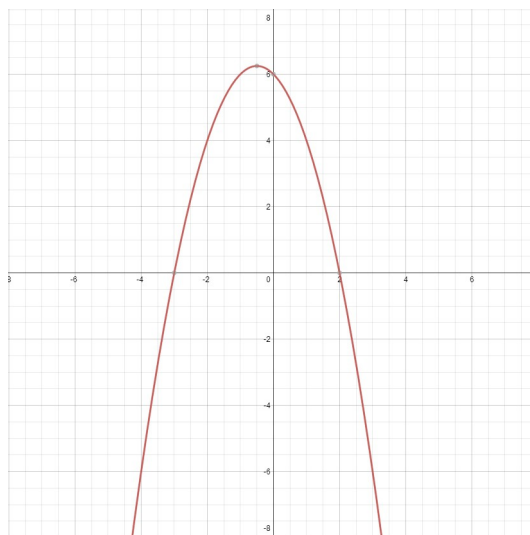
1  $f(-3)=0 \leftrightarrow x_1=-3$   
 $f(2)=0 \leftrightarrow x_2=2$

**Příklad 2****úloha zdánlivě podobná**

Řešte kvadratickou rovnici  $-x^2 - x + 6 = 0$ .

Graf související funkce  $y = -x^2 - x + 6$  **protíná** osu  $x$  v bodech, kde  $f(x) = 0$ , což jsou kořeny kvadratické rovnice  $-x^2 - x + 6 = 0$ ; v našem případě to jsou body  $-3$  a  $2$ .<sup>2</sup>

Řešením rovnice jsou  $x_1 = -3$   
 $x_2 = 2$ .



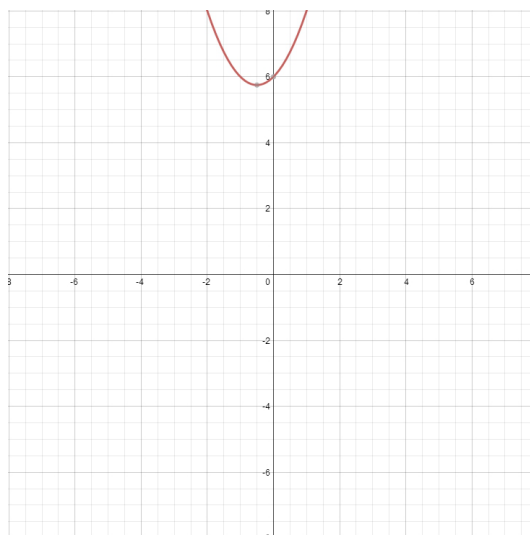
Graf 2

**Příklad 3****úloha zdánlivě podobná**

Řešte kvadratickou nerovnici  $x^2 + x + 6 = 0$ .

Graf související funkce  $y = x^2 + x + 6$  **neprotíná** osu  $x$  v žádných bodech.

Rovnice nemá řešení  $x_{1,2} \in \emptyset$ .



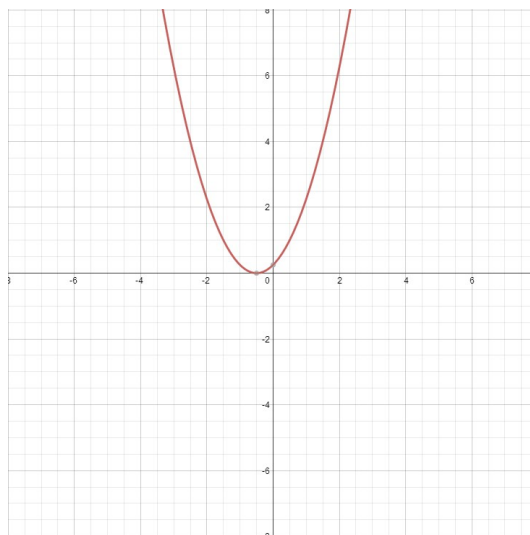
Graf 3

<sup>2</sup>  $f(-3) = 0 \leftrightarrow x_1 = -3$   
 $f(2) = 0 \leftrightarrow x_2 = 2$

**Příklad 4****úloha zdánlivě podobná**

Řešte kvadratickou rovnici  $x^2+x+0,25=0$  .

Graf související funkce  $y=x^2+x+0,25$  se dotýká osy  $x$  v bodě, kde  $f(x)=0$ , což je kořen (dvojnásobný) kvadratické rovnice  $-x^2-x+6=0$  ; v našem případě to je bod  $-0,5$ .<sup>3</sup>



Graf 4

Řešením rovnice je  $x_{1,2} = -0,5$  .

Při řešení **kvadratické** rovnice mohou nastat pouze tři různé případy

- rovnice má **dva** kořeny
- rovnice má jeden **dvojnásobný** kořen
- rovnice **nemá** kořeny

Konstrukce grafu je většinou obtížná a odečítání z grafu je zpravidla nepřesné. Proto je namísto i algebraické řešení. Alespoň částečná představa grafu je ale vždy velmi užitečná.

**Příklad 5**

Nalezněte kořeny kvadratické rovnice  $ax^2+bx+c=0$  .

Lze ukázat, že poloha odpovídající paraboly je určena vztahem  $b^2-4ac$  , který nazýváme **diskriminant** kvadratické rovnice  $ax^2+bx+c=0$  a krátce značíme  $D$ .

$$D=b^2-4ac$$

Diskriminant může nabývat záporné hodnoty, může být roven nule nebo nabývat kladné hodnoty - na těchto třech možnostech záleží kořeny.

<sup>3</sup>  $f(-0,5) = 0 \leftrightarrow x_{1,2} = -0,5$

Při řešení **kvadratické** rovnice  $ax^2+bx+c=0$  mohou nastat pouze tři různé případy

- rovnice má **dva** kořeny  $x_1, x_2$                       **dva** průsečíky s  $o_x$                        **$D > 0$**
- rovnice má jeden **dvojnásobný** kořen  $x_{1,2}$                       **jeden** průsečík s  $o_x$                        **$D = 0$**
- rovnice **nemá** kořeny                      **nemá** průsečík s  $o_x$                        **$D < 0$**

kde  $D=b^2-4ac$  je diskriminant.

Pro kořeny rovnice pak platí

- jestliže  $D > 0$ , pak  $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$  a  $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$
- jestliže  $D = 0$ , pak  $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$
- jestliže  $D < 0$ , pak  $x_{1,2} \in \emptyset$

Pro praktické počítání lze předchozí shrnout do jediného vzorce, s nímž ale bude třeba zacházet velmi obezřetně

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pravidla

- pokud existuje druhá odmocnina (větší než nula) jednou ji přičteme - první kořen a podruhé ji odečteme - druhý kořen
- pokud je druhá odmocnina 0, rovnice má jeden dvojnásobný kořen
- pokud je pod odmocninou záporné číslo, rovnice nemá řešení

### Příklad 6

Řešte kvadratickou rovnici  $x^2+x-6=0$ .

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Viz Příklad 1

**Příklad 7**

Řešte kvadratickou rovnici .  $x^2+x+0,25=0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2}$$

Viz Příklad 4

**Příklad 8**

Řešte kvadratickou rovnici .  $x^2+x+6=0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2} \Rightarrow$$

$$x_{1,2} \in \emptyset$$

Viz Příklad 3

**Příklad 9**

Řešte kvadratickou rovnici .  $2x^2+3x-5=0$

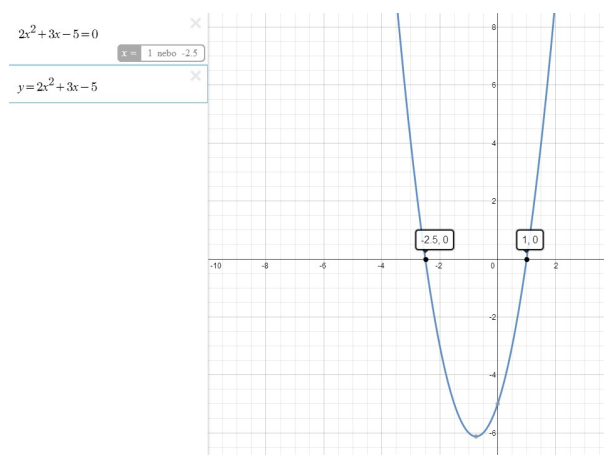
$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3+7}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-3-7}{4} = -\frac{5}{2}$$



**Vzorec**

Kvadratická rovnice  $ax^2+bx+c=0$  má kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dva  $b^2 - 4ac > 0$

jeden dvojnásobný  $b^2 - 4ac = 0$

nemá kořeny  $b^2 - 4ac < 0$

Výpočet kořenů pomocí vzorce je **vždy** možný a spolehlivý, ale ne vždy je snadný.

V některých případech lze kořeny určit daleko rychleji a snadněji.

**Pomůcky**

Součin je 0, když jeden nebo druhý činitel je 0.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Druhá mocnina každého čísla je vždy **nezáporná**.

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

Kvadratický trojčlen lze pomocí vzorce zapsat jako druhou mocninu součtu (rozdílu).

$$9x^2 + 30x + 25 = 0$$

$$(3x + 5)^2 = 0$$

$$3x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{3}$$

**Bez absolutního (konstantního) členu**  $ax^2+bx=0$

vytknutím  $x$  z obou členů lze převést na součin

$$9x^2 + 30x = 0$$

$$3x(3x + 10) = 0$$

$$3x = 0 \quad \vee \quad 3x + 10 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = -\frac{10}{3}$$

**Ryze kvadratická (bez lineárního členu)  $ax^2+c=0$** 

$$9x^2 - 25 = 0$$

$$9x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25}{9}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{5}{3}$$

Ale pozor!

$$9x^2 + 25 = 0$$

$$9x^2 = -25$$

$$x^2 = -\frac{25}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} \in \emptyset$$

**Vietovy vzorce (v normovaném tvaru, tj.  $a = 1$ )  $x^2+bx+c=0$** 

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$3 \cdot 8 = 24$$

$$3 + 8 = -(-11)$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 8$$

$$x^2 + 11x + 24 = 0$$

$$(-3) \cdot (-8) = 24$$

$$(-3) + (-8) = -(+11)$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -8$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$-3 \cdot 8 = -24$$

$$-3 + 8 = -(-5)$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 8$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$3 \cdot (-8) = -24$$

$$3 + (-8) = -(+5)$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -8$$

$$x^2 - 10x - 24 = 0$$

$$-2 \cdot 12 = -24$$

$$-2 + 12 = -(-10)$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 12$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$(-4) \cdot (-6) = 24$$

$$(-4) + (-6) = -(+10)$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = -6$$

$$x^2 - 25x + 24 = 0$$

$$1 \cdot 24 = 24$$

$$1 + 24 = -(-25)$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 24$$

$$x^2 - 5x + 24 = 0$$

$$x_{1,2} \in \emptyset$$

## Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Kvadratická rovnice
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_32
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	17. 03. 2014
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní list se zadáním a řešením jednotlivých typů kvadratických rovnic.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	