Funkce, rovnice a jejich užití

Kvadratická funkce

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M2_31

06. 03. 2014

Mgr. Pavel Nekvinda

Pracovní listy s výkladem, s řešenými modelovými příklady, se zadáním a řešením příkladů k procvičení grafů kvadratických funkcí.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky* v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je každá funkce, která je zapsaná nebo ji lze zapsat ve tvaru:

$f: y = a x^2 + b x + c$

kde a, b, c jsou reálné koeficienty a $a \neq 0$.

Výraz $a x^2 + b x + c$ se nazývá kvadratický trojčlen, kde

$a x^2$ je kvadratický člen,

$b x$ člen lineární a

c je člen absolutní (konstantní)

a je koeficient kvadratického členu

b je koeficient lineárního členu

c je koeficient absolutního (konstantního) členu

Kvadratické funkce jsou časté v geometrii, ve fyzice a životě vůbec – obsah čtverce $S = a^2$ nebo kruhu $S = \pi r^2$, $s = \frac{1}{2} a t^2$, $E = \frac{1}{2} m v^2$, $E = mc^2$, $P = R I^2$

Graf

Grafem kvadratické funkce je křivka, která se nazývá **parabola.** Parabola má jeden význačný bod – **vrchol**, ve kterém má minimum nebo maximum.

Elementární[1] funkce

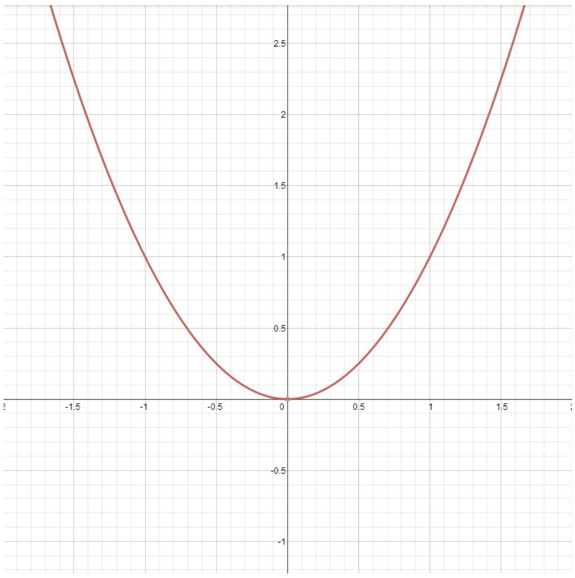
$f: y = x^2$ $\quad kde: a = 1; b = 0; c = 0$

Graf *základní parabola*

souřadnice vrcholu *V[0;0]*

význačné body *[1;1]*
[-1;1]

parabola *osově souměrná podle o_y*



Obr. 1: Taky elementární kvadratická funkce

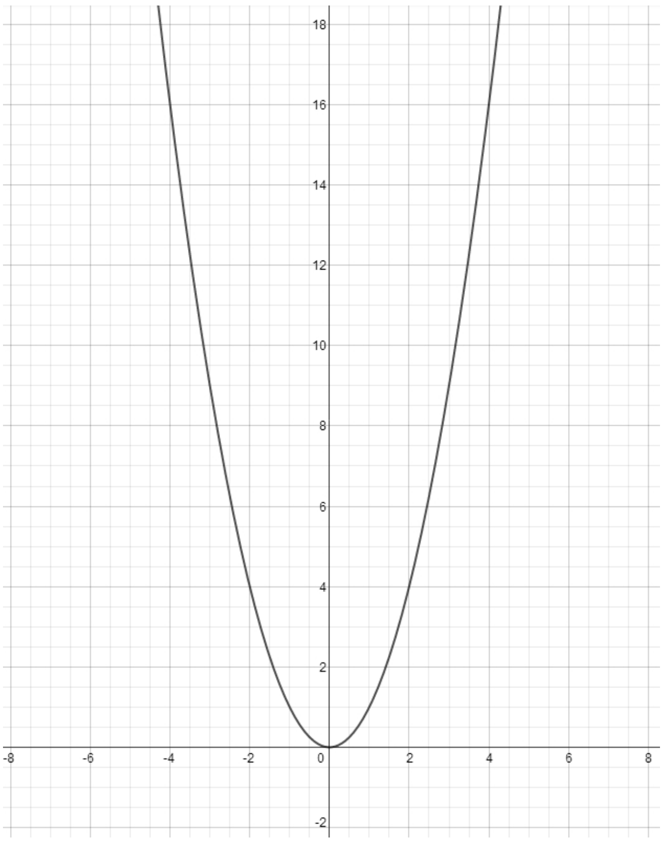
1 Elementární neboli základní, ta nejjednodušší ze všech kvadratických funkcí

Vlastnosti elementární kvadratické funkce

1. $D(f) = R$
   $H(f) = \langle 0 ; \infty \rangle$
2. Není monotónní
3. Je zdola omezená
4. Je sudá
5. Není prostá
6. Je spojitá
7. Má minimum 0 v bodě 0 (vrchol)

Tabulka funkčních hodnot pro některé body elementární kvadratické funkce

					V								
x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,1	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6
y	9	4	1	0,25	0	0,01	0,625	0,25	1	4	9	16	25	36



Obr. 2

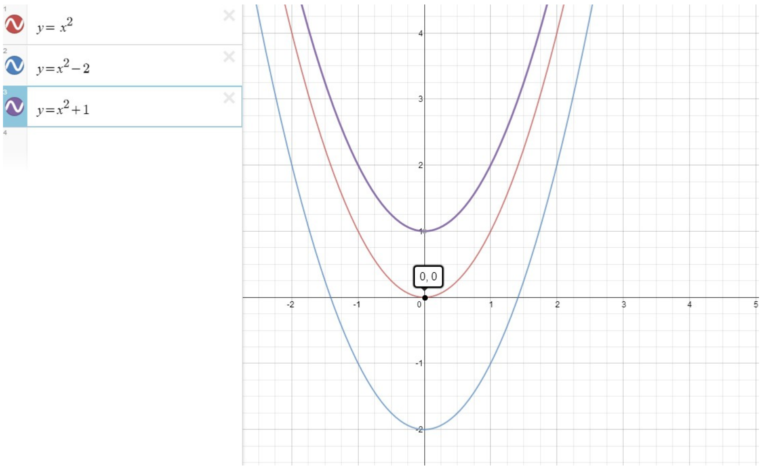
Práce s grafem

Vždy vyjdeme ze tvaru a umístění *základní paraboly*.

- **Posun ve směru osy y**

  $y=x^2+p$

  V [0;**p**]

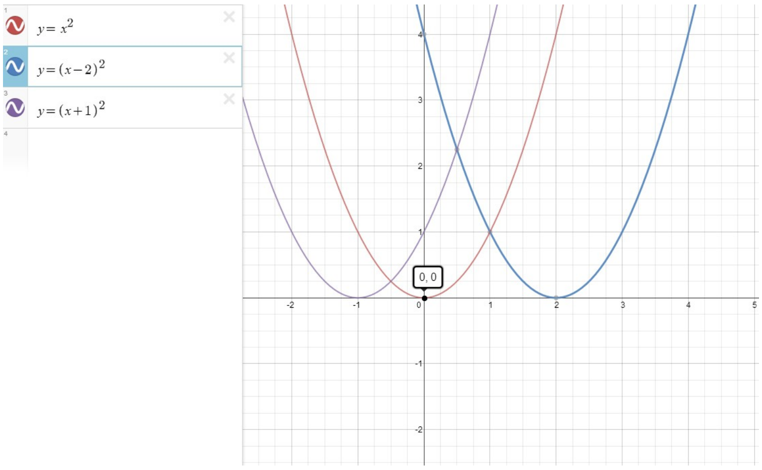


Obr. 3

- **Posun ve směru osy x**

  $y=(x-x_0)^2$

  V [**-x$_0$**;0]

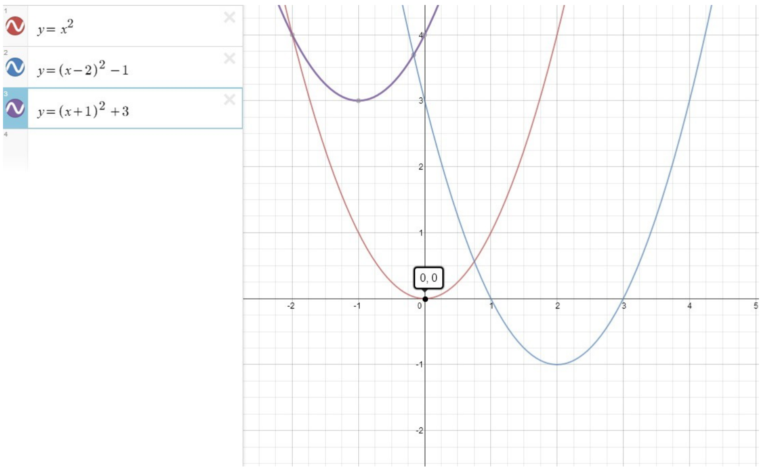


Obr. 4

- **Posun ve směru os x, y**

  $y=(x-x_0)^2+p$

  V [**-x$_0$**;**p**]



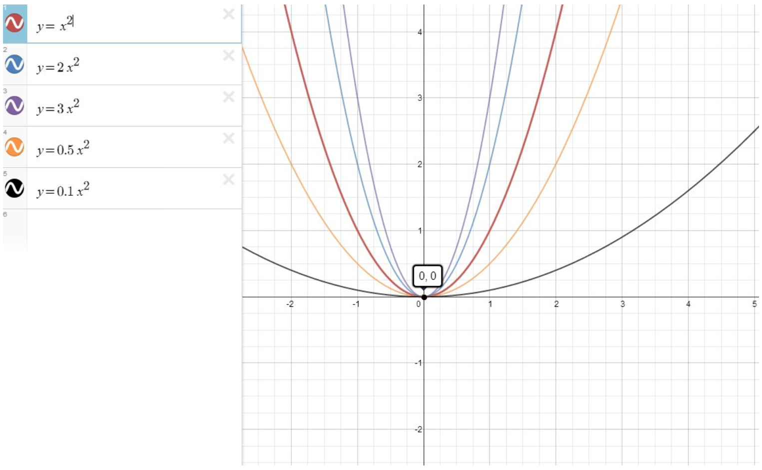
Obr. 5

- **Změna „tvaru“**

  $y = a\,x^2$

  |a| … strmost

  V [0;0]



Obr. 6

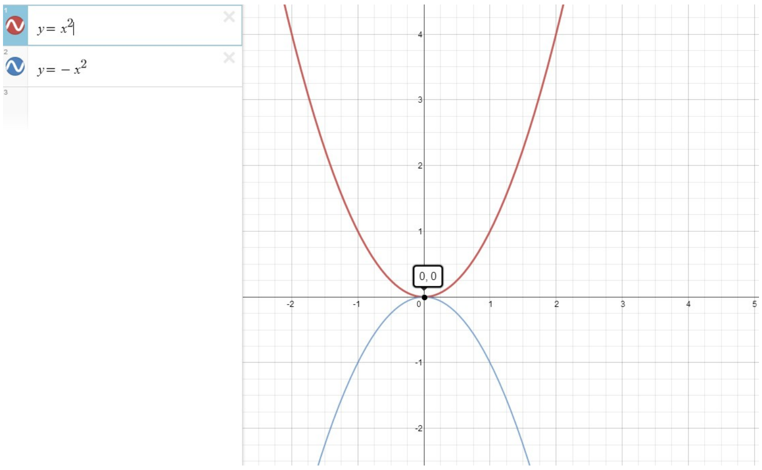
- **Změna „orientace“**

  $y = -x^2$

  a > 0 … V dole

  a < 0 … V nahoře

  V [0;0]



Obr. 7

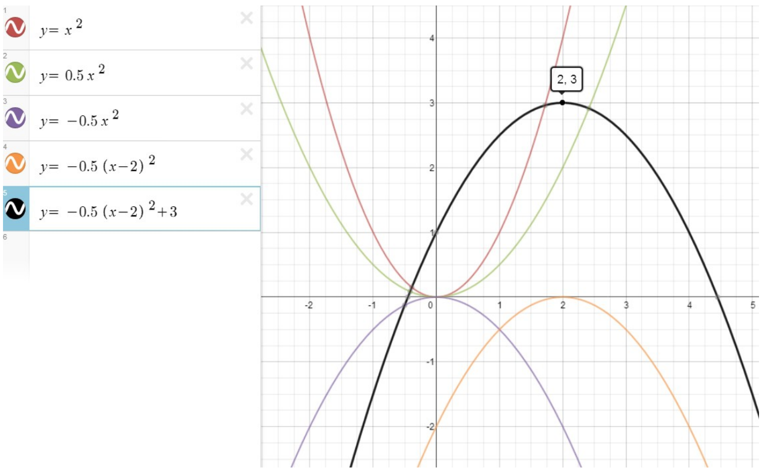
- **Všecko postupně najednou**

  Načrtněte graf fce

  $y = -0{,}5(x-2)^2 + 3$

  Sledujte sled

  $y = x^2$
  $y = 0{,}5\,x^2$
  $y = -0{,}5\,x^2$
  $y = -0{,}5(x-2)^2$
  $y = -0{,}5(x-2)^2 + 3$



Obr. 8

Doplnění na čtverec

Pro náčrtek grafu je výhodný tvar funkčního předpisu $y=a(x-x_0)^2+p$. Ten základní funkční předpis je ale tvaru $y=ax^2+bx+c$. Lze, a když ano, tak jak, jeden tvar funkčního předpisu převést na druhý? Zcela čekaně zní odpověď *ano*. Nyní už jen zbývá ukázat jak.

1. Z $y=a(x-x_0)^2+p$ na $y=ax^2+bx+c$

   Umocněním dvojčlenu v závorce **snadno** dosáhneme kýženého cíle

   $$y=a(x-x_0)^2+p=a(x^2-2x_ox+x_o^2)+p=ax^2-2ax_ox+ax_o^2+p=ax^2+bx+c$$

   kde $a=a$, $b=-2ax_o$, $c=ax_o^2+p$

Příklad 1

$$y=4(x-3)^2-11=$$
$$=4(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)-11=$$
$$=4(x^2-6x+9)-11=$$
$$=2x^2-12x+18-11=$$
$$=2x^2-12x+7$$

2. Z $y=ax^2+bx+c$ na $y=a(x-x_0)^2+p$

   „Stačí" projí celý proces v 1. zpětně. Takovému tríčku se říká **doplnění na čtverec**. Využijeme k tomu staré známé algebraické vzorce $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$. A celé ukážeme na příkladu.

Příklad 2

Načrtněte graf funkce f: $y = 2x^2 - 12x + 7$

1. Jelikož chceme předpis se závorkou $(x - x_0)^2$, ze členů ax^2, bx **vytkneme** *a*

   $2x^2 - 12x + 7 = 2\,[x^2 - 6x] + 7$

2. x^2 odpovídá A^2 → x odpovídá A

   $-6x$ odpovídá $-2AB$ → 6 odpovídá $2B$ → $B = 6 : 2 = 3$

   $x^2 - 6x$ → $(x - 3)^2$

3. Umocněním $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 3^2$ ale zjistíme, že nám – vám „přebývá" 3^2 (B^2). Aby rovnost platila, je vždy nutné **odečíst** B^2.

$[x^2 - 6x] = (x - 3)^2 - 3^2$

$2\,[x^2 - 6x] + 7 = 2\,[(x - 3)^2 - 3^2] + 7 = 2\,[(x - 3)^2 - 9] + 7$

4. Odstraníme hranatou závorku a sečteme

$2\,[(x - 3)^2 - 9] + 7 = 2\,(x - 3)^2 - 18 + 7 = 2\,(x - 3)^2 - 11$

5. A můžeme s klidným srdcem psát

$f\!: y = 2x^2 - 12x + 7 = 2\,(x - 3)^2 - 11$

6. Z funkčního předpisu snadno odečteme souřadnice vrcholu paraboly

$f\!: y = 2\,(x - 3)^2 - 11$ → V [3; -11]

7. Z funkčního předpisu snadno odečteme strmost a orientaci paraboly

$f\!: y = 2x^2 - 12x + 7 = 2\,(x - 3)^2 - 11$

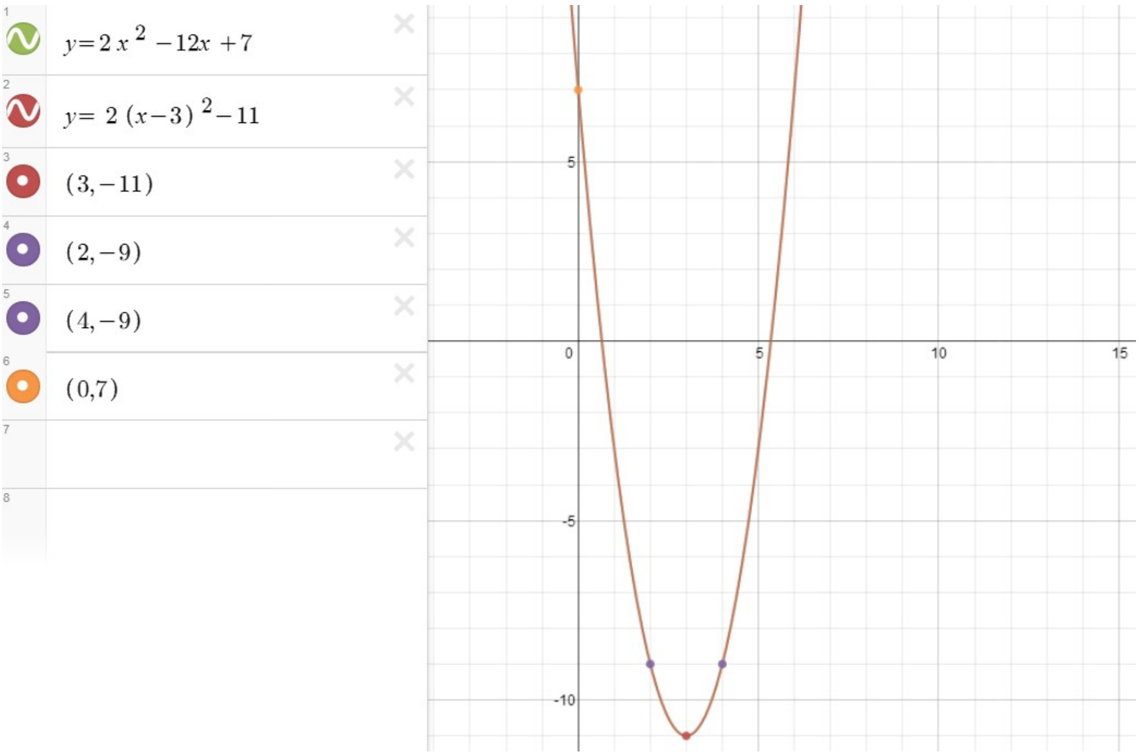
$|2| > 1$ → strmější [2, -9] ; [4, -9]

$2 > 0$ → vrchol dole

8. Z funkčního předpisu snadno odečteme průsečík paraboly s osou y

$f\!: y = 2x^2 - 12x + 7 = 2\,(x - 3)^2 - 11$

$f\!: y = 2x^2 - 12x + 7 = 2\,(x - 3)^2 - 11$



Obr. 9

Příklad 3

Načrtněte graf funkce f: $y = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$

f: $y = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5 =$

$= -0{,}5\,[x^2 - 6x] - 2{,}5 =$

$= -0{,}5\,[(x-3)^2 - 9] - 2{,}5 =$

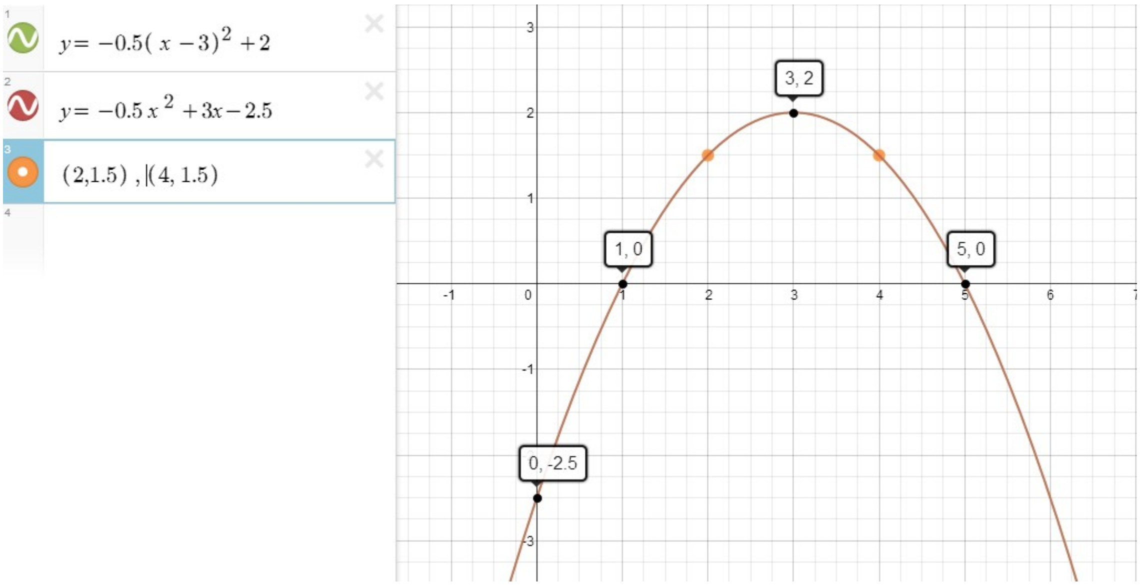
$= -0{,}5\,(x-3)^2 + 4{,}5 - 2{,}5 =$

$= -0{,}5\,(x-3)^2 + 2$

V[3;2]

[0; -2,5]

vrchol nahoře, „otevřenější" [2; 1,5] a [4; 1,5]



Obr. 10

Průsečíky s osami

Pro popis funkce, práci s funkcí a jejím grafem je důležité dokázat určit průsečíky s osami. Tak jako je přímka (lineární útvar – prvního stupně) jednoznačně určena dvěma body, je parabola (kvadratický útvar – druhého stupně) určena alespoň **třemi** body.

- Průsečík s osou o_y lze snadno vyčíst z funkčního předpisu ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$ jak je ukázáno v předchozím. Odpovídá koeficientu **c**.
- Průsečík s osou o_x vždy snadno určit nelze. Pro některé případy – a ty bychom měli být schopni orientačně určit – stačí vyjít ze základních vlastností průběhu. Jak určit průsečíky s *osou x* obecně si ukážeme při řešení kvadratických rovnic.

Sbírka

Načrtněte grafy kvadratických funkcí[2]

a: $y=x^2-3$

b: $y=(x-3)^2$

c: $y=-3x^2$

d: $y=-\frac{1}{3}x^2$

e: $y=x^2-3x$

f: $y=x^2+3$

g: $y=(x+3)^2$

h: $y=3x^2$

i: $y=\frac{1}{3}x^2$

j: $y=x^2+3x$

k: $y=-\frac{1}{3}x^2+3$

l: $y=3(x+3)^2-3$

m: $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2+3$

n: $y=-3x^2+6x+3$

o: $y=x^2-2x-3$

p: $y=x^2+2x-3$

q: $y=x^2-2x-3$

r: $y=-x^2+2x+3$

s: $y=(x-2)^2-9$

t: $y=-(x+3)^2+4$

u: $y=0{,}5(x-2)^2-8$

v: $y=-2(x-3)^2+8$

w: $y=-x^2-6x$

x: $y=x^2-4x-5$

y: $y=-2x^2+12x-10$

z: $y=0{,}5x^2-2x-6$

2 K ověření správnosti svého řešení použijte webovou aplikaci www.desmos.com

Literatura

JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 361 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4955-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 142 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6042-X.

Webová aplikace https://www.desmos.com/calculator

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Funkce, rovnice a jejich užití
Název	Kvadratická funkce
Číslo DUM	VY_42_inovace_M2_31
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	06. 03. 2014
Předmět	Matematika
Ročník	P2
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Pracovní listy s výkladem, s řešenými modelovými příklady, se zadáním a řešením příkladů k procvičení grafů kvadratických funkcí.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	