Střední škola podnikání Vysoké Mýto

Malá škola - velká rodina

Opakování a rozšíření učiva ze ZŠ

Dělitelnost

Digitální učební materiál

VY_42_inovace_M1_103

08. 10. 2013

Mgr. Pavel Nekvinda

Výklad, řešené ilustrační příklady a příklady s řešením.

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu *Individualizace a inovace výuky*
v rámci OP *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Dělitelnost

Dělitel daného čísla (např. 12) je číslo (např. 3), které dané číslo dělí bezezbytku (12 : 3 = 4). Říkáme: *3 je dělitel 12* nebo *3 dělí 12* nebo *12 je násobkem 3.* Zapisujeme: *3|12* nebo *12 = 3 · k.*

5 není dělitelem 12, jelikož po dělení je zbytek 2.

Některá čísla mají více dělitelů: d(60) = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60}

Přirozená čísla podle počtu dělitelů můžeme rozdělit do tří skupin
- právě 1 dělitel 1
- právě 2 dělitele prvočísla
- alespoň 3 dělitele složená čísla

Prvočísla jsou jakési základní stavební kostičky (jako u LEGA), ze kterých jsou ostatní – **složená čísla** – poskládána. Číslo 1 je samo pro sebe – není to ani prvočíslo ani číslo složené.

Erastothenovo síto. Takové rozdělení si uvědomil už v antice a Eratosthenes z Kyrény (276–194 př. n. l.) a pokusil se prvočísla vyhledat. Vytvořil voskovou destičku na kterou zapsal čísla za sebou. Potom vzal žhavé železo a začal počítat. Našel první druhé číslo (2), označil ho a pak už každé druhé číslo vypálil – tím železem. Když byl hotov našel a označil první třetí číslo (3) a zase každé třetí číslo vypálil. Občas zjistil, že některá čísla už vypálena jsou. Místo prvního čtvrtého čísla našel díru a všechna čtvrtá čísla byla už také vypálena – alespoň je méně práce. Pak vypaloval pátá, šestá (ta už byla vypálena), sedmá … Z tabulky toho nezbylo mnoho – sem tam nějaké **prvočíslo**, jinak samé díry – hotové síto!

1	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Takhle dopadla tabulka čísel do 100 po „vypálení“ každého sedmého čísla. S jistotou, aniž bychom pro ně opakovali předchozí postup (algoritmus), můžeme tvrdit, že všechna zbývající čísla jsou prvočísla.

> *Každé složené číslo (n) má alespoň jednoho prvočíselného dělitele (p) tak, že platí:* $p \leq \sqrt{n}$.

Číslo 100 a menší tedy stačí prověřit prvočísly menšími než $\sqrt{100} = 10$, tj. 2, 3 , 5, 7.

Číslo 200 a menší stačí prověřit prvočísly menšími než $\sqrt{200}<15$, tj. 2, 3 , 5, 7, 11, 13.

Prvočíselný rozklad

Prvočísla mají v dnešním světě značný význam. Pomocí nich se např. kódují různá bezpečnostní hesla a zabezpečená připojení v počítačových sítích, online přístupech na osobní i bankovní účty atp.

Prvočíselný rozklad je vyjádření přirozeného čísla jako součinu mocnin prvočísel.

Základní věta aritmetiky

Každé přirozené číslo větší než 1 lze jednoznačně rozložit na součin prvočísel (na prvočinitele).

$n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdot p_4^{k_4}\cdot p_5^{k_5}\cdot\ldots$ kde p_i jsou po řadě prvočísla a k_i = {0, 1, 2, 3, 4, ...} je příslušná mocnina prvočísla

$a^0 = 1$ $a^1 = a$

Příklad 1

$$7=2^0\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^1\cdot 11^0\cdot\ldots=7$$
$$49=2^0\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^2\cdot 11^0\cdot\ldots=7^2$$
$$44=2^2\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^0\cdot 11^1\cdot\ldots=2^2\cdot 11$$
$$600=2^3\cdot 3^1\cdot 5^2\cdot 7^0\cdot 11^0\cdot\ldots=2^3\cdot 3\cdot 5^2$$
$$9\ 147\ 600=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^1\cdot 11^2\cdot\ldots=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11^2$$

Znaky dělitelnosti[1]

Abychom vždy a znovu nemuseli vyrábět a vypalovat destičky, odpočítávat tolikáté číslo v řadě, zkoušet dělit a dělit, svět – příroda – matematika se nad námi slitovala a obdařila čísla jakýmisi značkami, podle kterých ledasco snáze rozpoznáme. Takovým značkám říkáme *znaky dělitelnosti.*

Číslo je dělitelné	právě tehdy, když je	příklad
2	**poslední číslice dělitelná 2**	6 987 514
4	poslední dvojčíslí[2] dělitelné 4	6 987 516
8	poslední trojčíslí[3] dělitelné 8	6 987 416
3	**ciferný součet dělitelný 3**	6 987 516
9	ciferný součet dělitelný 9	6 987 213
5	**poslední číslice dělitelná 5 (tj. 5 nebo 0)**	6 987 515
25	poslední dvojčíslí dělitelné 25	6 987 550

1 My se omezíme pouze na **nejznámější** znaky a některé jednoduché kombinace. Podrobnější přehled naleznete např. na http://cs.wikipedia.org/wiki/D%C4%9Blitelnost .

2 $4 = 2^2$ → dvojčíslí

3 $8 = 2^3$ → trojčíslí

7	- [4]	
11	**rozdíl ciferných součtů číslic na sudých a lichých místech 0 nebo dělitelný jedenácti**	6 984 516
6	zároveň dělitelné 2 a 3 (6 = 2 × 3)	6 987 516
10	zároveň dělitelné 2 a 5 (10 = 2 × 5)	6 987 510
12	zároveň dělitelné 3 a 4 (12 = 3 × 4)	6 987 516
15	zároveň dělitelné 3 a 5 (15 = 3 × 5)	6 987 615
18	zároveň dělitelné 2 a 9 (18 = 2 × 9)	6 987 222
20	zároveň dělitelné 4 a 5 (20 = 4 × 5)	6 987 540
22	zároveň dělitelné 2 a 11 (22 = 2 × 11)	6 984 516
24	zároveň dělitelné 3 a 8 (24 = 3 × 8)	6 982 416

Největší společný dělitel D(a, b)

Největší společný dělitel daných čísel je největší číslo, jímž jsou daná čísla dělitelná.

Najít největšího společného dělitele některých čísel není obtížné. Jindy nemáme jistotu, zda námi určený společný dělitel je ten skutečně největší. A jindy je takové hledání opravdu nad síly i bystrého člověka. Proto si ukážeme (na příkladu) osvědčený mechanismus, jak D(a, b) najít.

Příklad 2

Určete největšího společného dělitele čísel 2 640 a 2 520.

1. zapíšeme prvočíselné rozklady daných čísel

$$2640=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 11=2^4\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^0\cdot 11^1$$
$$2520=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^1\cdot 11^0$$

2. Jelikož společný dělitel musí dělit daná čísla, vybereme **nejnižší mocniny** jednotlivých prvočinitelů

$$D(2640,2520)=2^3\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^0\cdot 11^0=2^3\cdot 3\cdot 5=120$$

Příklad 3

Určete největšího společného dělitele čísel 2 640 a 2 520.

1. zapíšeme prvočíselné rozklady daných čísel

$$176=2^4\cdot 11=2^4\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^0\cdot 11^1$$
$$315=3^2\cdot 5\cdot 7=2^0\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^1\cdot 11^0$$

2. Jelikož společný dělitel musí dělit daná čísla, vybereme **nejnižší mocniny** jednotlivých prvočinitelů

$$D(176,315)=2^0\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^0\cdot 11^0=1$$

Čísla a, b, pro která platí D(a, b) = 1 nazýváme *nesoudělná čísla*.
Čísla a, b, pro která platí D(a, b) > 1 nazýváme *soudělná čísla*.

4 Je hned několik pravidel jak dělitelnost 7 rozpoznat, ale jsou složitější a mimo ráme naší výuky

Nejmenší společný násobek n(a, b)

Nejmenší společný násobek daných čísel je nejmenší číslo, které je danými čísly dělitelné.

S nejmenším společným násobkem to je obdobné jako s největším společným dělitelem.

Příklad 4
Určete největšího společného dělitele čísel 2 640 a 2 520.

1. zapíšeme prvočíselné rozklady daných čísel
$$2640=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 11=2^4\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^0\cdot 11^1$$
$$2520=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^1\cdot 11^0$$

2. Jelikož společný násobek musí být dělitelný danými čísly, vybereme **nejvyšší mocniny** jednotlivých prvočinitelů
$$n(2640,2520)=2^4\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^1\cdot 11^1=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11=55440$$

Součin, dělitel, násobek

Pro všechna přirozená čísla platí $a\cdot b=D(a,b)\cdot n(a,b)$.

Příklad 5
Bez použití kalkulačky určete součin čísel 2 640 a 2 520, jestliže D(2 640, 2 520) = 120 a n(2 640, 2 520) = 55 440.

2 640 · 2520 = 55 440 · 120 =

= (55 440 · 10 + 55 440 · 2) · 10 =

=(554 400 + 110 880) · 10 =

= 6 652 800

Příklady k procvičení

Cvičení 2

1. Určete:
   a) D (60, 75)
   b) D (135, 420)
   c) D (108, 132, 180)
   d) D (16, 24, 32, 52)
   e) D (100, 200, 300)

2. Určete:
   a) n (2, 5, 6, 12, 15, 20, 24, 60)
   b) n (105, 140)
   c) n (9, 12, 15)
   d) n (12, 18, 21)
   e) n (70, 125, 150)

3. Z čísel 525 120; 543 702; 5 032; 1 800; 2 808; 3 808; 2 800; 14 705; 13 800; 14 700 vyberte čísla dělitelná
   a) 15
   b) 24
   c) 18
   d) 72

4. V ozubeném soukolí zapadá kolečko s 20 zuby do kolečka s 32 zuby. Kolikrát se po spuštění stroje kolečka otočí, aby do označené mezery opět zapadl označený zub.

5. Obvod obdélníku je 22 cm a obsah 30 cm^2. Určete rozměry, jsou-li délky stran obdélníku v centimetrech vyjádřeny celými čísly.

6. Každý letopočet po roce 1582, který je dělitelný čtyřmi, je rokem přestupným, vyjma letopočty dělitelné stem; z těch jsou přestupné jen ty, u nichž je počet set dělitelný čtyřmi.[5]
   Stanovte, které z uvedených roků byly nebo budou přestupné
   1628, 1700, 1834, 1880, 1900, 1910, 1944, 2000, 2010, 2412, 2700

5 Složité pravidlo o přestupných rocích přijel roku 1582 papež Řehoř XIII. na radu astronomů. Do té doby platil tzv. juliánský kalendář, uzákoněný Juliem Caesarem roku 46 př. Kr. V něm byl každý čtvrtý rok přestupný, tj. Měl 366 místo běžných 365 dní. Juliánský kalendář by byl ideální, kdyby skutečný astronomický rok měl 365,25 dne. Protože je rok o něco kratší (365,2422 dne ~ 11 minut), byla v novém tzv. gregoriánském kalendáři zrušena přestupnost letopočtů dělitelných stem. Tak bylo dosaženo toho, že jeden kalendářní rok má průměrně 365,24 dne.

Řešení

1a)	15
1b)	15
1c)	12
1d)	4
1e)	100
2a)	120
2b)	420
2c)	180
2d)	252
2e)	1 050
3a)	525 120, 1 800, 13 800, 14 700
3b)	252 120, 1 800, 2 808, 13 800
3c)	1 800, 2 808
3d)	1 800, 2 808
4)	160 zubů → malé 8×, velké 5×
5	5 cm, 6 cm
6)	1628, 1880, 1944, 2000, 2412

Literatura

HERMAN, Jiří. *Matematika: prima*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 100 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-261-8.

Registrační číslo	CZ.1.07/1.5.00/34.0577
Šablona	IV/2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Tematická oblast	Opakování a rozšíření učiva ze ZŠ
Název	Dělitelnost
Číslo DUM	VY_42_inovace_M1_103
Autor	Mgr. Pavel Nekvinda
Ověřeno ve výuce dne	08. 10. 2013
Předmět	Matematika
Ročník	P1
Anotace, klíčová slova, metodický pokyn	Výklad, řešené ilustrační příklady a příklady s řešením.
Pokud není uvedeno jinak, použitý materiál je z vlastních zdrojů autora.	