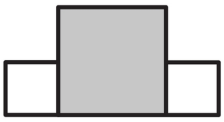
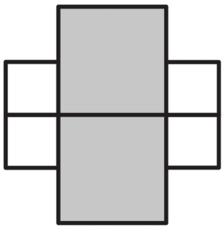
Úloha 1

První obrazec je tvořen dvěma bílými čtverci a jedním tmavým čtvercem. Obvod bílého čtverce je dvakrát menší než obvod tmavého čtverce. Obvod celého prvního obrazce je 96 cm. Druhý i třetí obrazec se skládá ze dvou prvních obrazců.

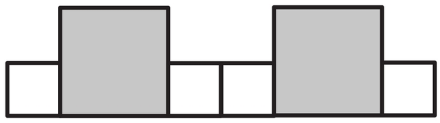
První obrazec



Druhý obrazec



Třetí obrazec

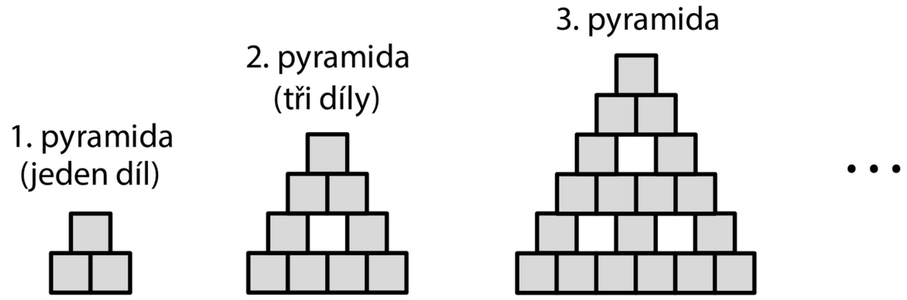


Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé (A), či nikoli (N)

	A	N
Obvod jednoho tmavého čtverce je 48 cm.		
Obvod celého druhého obrazce je 192 cm.		
Obvod celého třetího obrazce je o 48 cm větší než obvod celého druhého obrazce.		

Úloha 2

Každý díl stavebnice se skládá ze tří stejných krychliček. Všechny díly jsou stejné. Z dílů stavíme stále větší pyramidy jako na obrázku. Nejmenší pyramidu tvoří jediný díl. Druhá pyramida sestavená ze 3 dílů má 1 otvor, 4 řady a ve spodní řadě 4 krychličky. Každá další pyramida bude o dvě řady vyšší než předchozí pyramida.



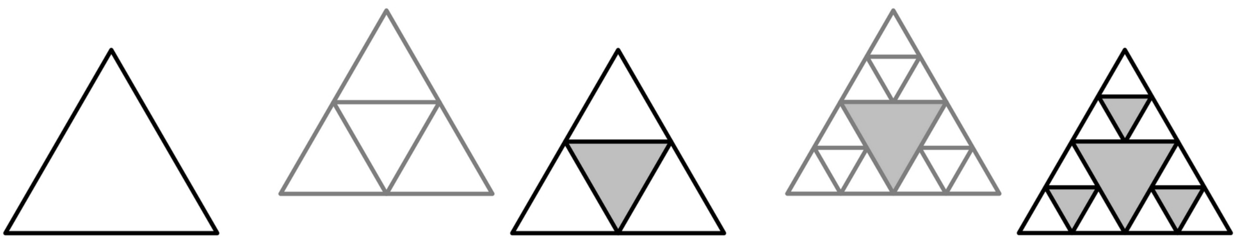
a) Pyramida má ve spodní řadě 50 krychliček.
Určete počet otvorů ve druhé řadě zdola.

b) Pyramida má celkem 10 otvorů.
Určete počet krychliček v celé pyramidě.

c) Pyramida je sestavena z 21 dílů.
Určete počet krychliček ve spodní řadě.

Úloha 3

Prvním obrazcem je bílý rovnostranný trojúhelník. Každý další obrazec vznikne z předchozího obrazce dle následujících pravidel: 1. Nejprve každý bílý trojúhelník v obrazci rozdělíme na 4 shodné rovnostranné trojúhelníky. 2. Poté v každé takto vzniklé čtveřici bílých trojúhelníků obarvíme vnitřní trojúhelník na šedo.



1. obrazec 2. obrazec 3. obrazec

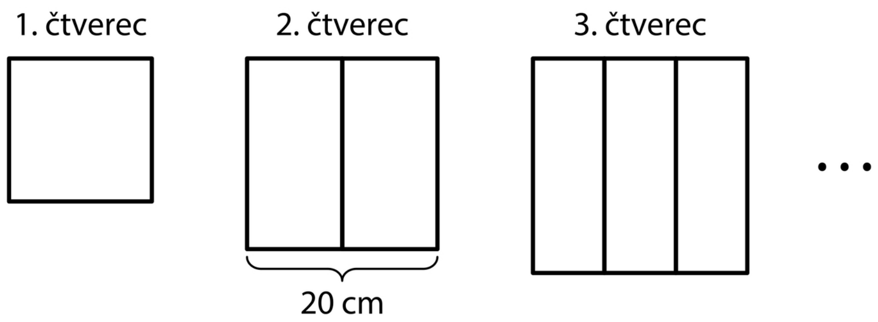
a) Určete, kolik bílých trojúhelníků obsahuje pátý obrazec.

b) Šestý obrazec obsahuje 121 šedých trojúhelníků. Určete, kolik šedých trojúhelníků obsahuje sedmý obrazec.

c) Počet šedých trojúhelníků v posledním a v předposledním obrazci se liší o 6 561. Určete, kolik bílých trojúhelníků obsahuje poslední obrazec.

Úloha 4

První čtverec má obvod 60 cm. Každý další čtverec je sestaven z několika shodných obdélníků. Každý z těchto obdélníků má obvod 60 cm. Druhý čtverec je sestaven ze dvou shodných obdélníků, třetí ze tří shodných (užších) obdélníků, čtvrtý ze čtyř shodných (ještě užších) obdélníků atd.



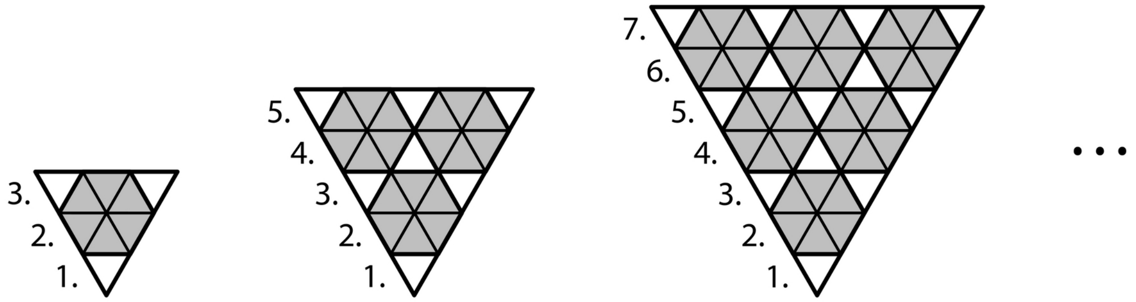
a) Vypočtěte v cm délku strany třetího čtverce.

b) Vypočtěte v cm obvod devátého čtverce.

c) Určete, kolikátý čtverec má stranu délky 28 cm.

Úloha 5

Trojúhelníkové obrazce se podle vzoru sestavují z tmavých šestiúhelníků a bílých trojúhelníků. Šestiúhelník se skládá ze 6 shodných tmavých trojúhelníků. Na obrázku jsou tři nejmenší trojúhelníkové obrazce. Jednotlivé řady obrazce jsou očíslovány vždy od nejkratší po nejdelší.



Obrazec má 19 řad. Určete počet

a) bílých trojúhelníků v 9. řadě,

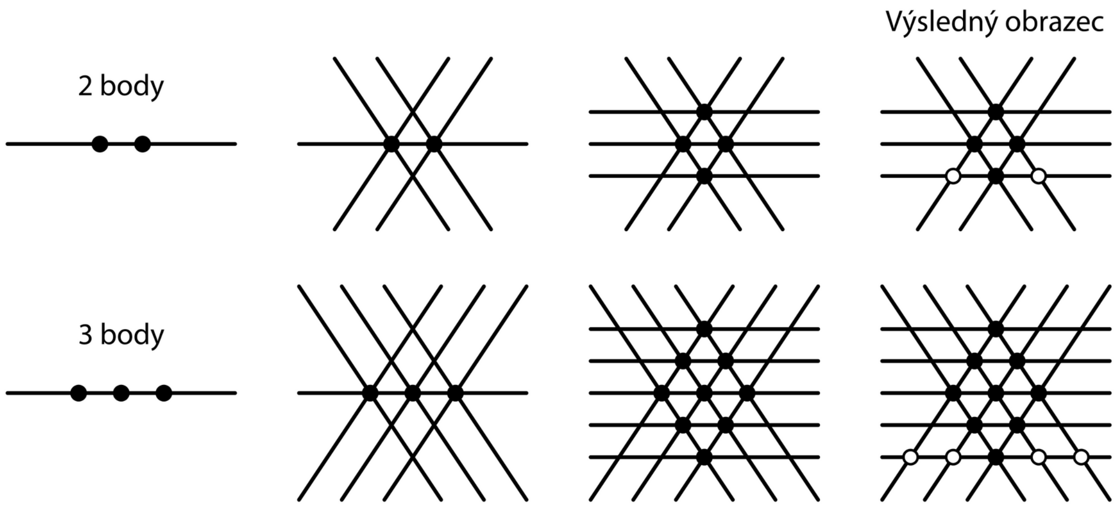
b) tmavých trojúhelníků v 16. řadě,

c) tmavých šestiúhelníků v celém obrazci.

Úloha 6

Výsledný obrazec vytvoříme následujícím postupem:

1. Na vodorovné přímce sestrojíme několik stejně vzdálených bodů (černých puntíků).
2. Prvním černým puntíkem vedeme dvě různoběžné šikmé přímky. Druhým a každým dalším černým puntíkem vedeme rovnoběžky s oběma těmito přímkami.
3. Všechny nově vzniklé průsečíky označíme černými puntíky a těmi vedeme vodorovné přímky.
4. Na spodní vodorovné přímce označíme všechny nově vzniklé průsečíky bílými puntíky.



a) Výsledný obrazec obsahuje celkem 36 černých puntíků. Určete počet všech vodorovných přímek v tomto obrazci.

b) Výsledný obrazec obsahuje celkem 49 vodorovných přímek. Určete počet bílých puntíků na spodní vodorovné přímce tohoto obrazce.

c) Výsledný obrazec má na spodní vodorovné přímce celkem 64 bílých puntíků. Určete počet všech černých puntíků v tomto obrazci.

Úloha 7

Do řady po sobě jdoucích kladných celých čísel přidáme za každé číslo dělitelné třemi toto číslo ještě jednou. Nová řada tak všechna čísla dělitelná třemi obsahuje dvakrát.

V nové řadě je na 1. až 17. místě následujících 17 čísel:

1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 12, 12, 13, …

Určete,

a) na kolikátém místě nové řady je číslo 100,

b) které číslo je na 100. místě nové řady,

c) na kolika místech nové řady je mezi čísly 1 až 101 uvedeno sudé číslo.

Úloha 8

Řada je vytvořena z celých čísel. První trojice čísel je 0, 1, 2.

Každou další trojici vytvoříme tak, že jednotlivá čísla z předchozí trojice zvětšíme o 1.

V řadě je na 1. až 18. místě následujících 18 čísel:

0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 7, …

Určete,

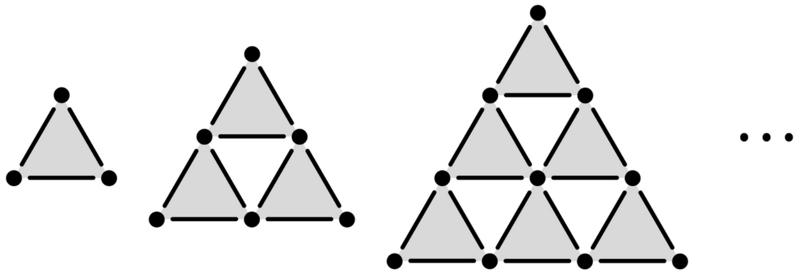
a) na kolikátém místě řady je poprvé číslo 12,

b) na kolika místech řady je mezi prvními 125 čísly uvedeno liché číslo,

c) které číslo je na 152. místě řady.

Úloha 9

Obrazce tvaru trojúhelníku se sestavují skládáním šedých trojúhelníků do pater (viz obrázek). Šedé trojúhelníky mají ve vrcholech puntíky a na stranách stejně dlouhé úsečky. V prvním obrazci je pouze jeden šedý trojúhelník a každý další obrazec má o jedno patro šedých trojúhelníků více než předchozí obrazec.



Patra	1	2	3
Šedé trojúhelníky	1	3	6
Puntíky	3	6	10
Úsečky	3	9	18

a) Určete počet úseček v obrazci, který má 5 pater.

b) Počet úseček v posledním a v předposledním obrazci se liší o 96. Určete, o kolik se liší počet puntíků v posledním a předposledním obrazci.

c) V jednom obrazci je 300 puntíků. Určete počet úseček v následujícím obrazci.

Úloha 10

Obdélník budeme opakovaně zvětšovat tak, že stranu, která je v daném okamžiku kratší, prodloužíme o 3 cm a delší stranu jen o 1 cm.

Po třetím prodloužení se vytvoří obdélník s rozměry 11 cm a 12 cm. Strana, která byla na počátku kratší, zůstane kratší po prvním, druhém i třetím prodloužení.

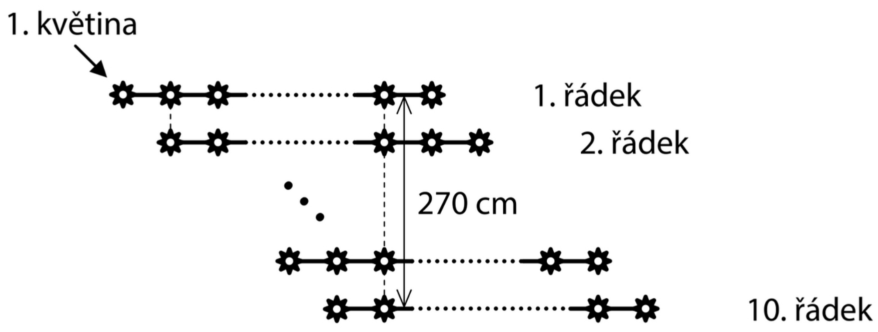
a) Určete rozměry původního obdélníku.

b) Určete rozměry obdélníku po pátém prodloužení.

c) Určete rozměry obdélníku po sto pátém prodloužení.

Úloha 11

Na záhonu je v každém z 10 řádků stejný počet květin. První květina ve druhém a každém dalším řádku je vždy na úrovni druhé květiny předchozího řádku. Rozestupy mezi sousedními květinami v řádcích i sloupcích jsou stejné. Květiny v 1. a 10. řádku, které jsou ve stejném sloupci, mají vzdálenost 270 cm. Předposlední květina v 1. řádku je ve stejném sloupci jako druhá květina v 10. řádku.



(Při výpočtech rozměry květin zanedbáváme.)

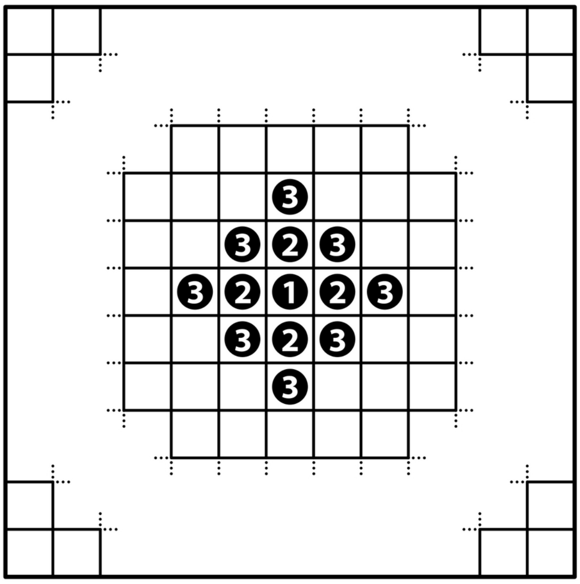
Vypočtěte

a) v cm rozestup mezi sousedními květinami,

b) počet květin vysázených v jednom řádku.

Úloha 12

Čtvercová deska má v každé řadě i v každém sloupci 15 polí. V prvním tahu se položí jeden žeton na prostřední pole desky. Ve druhém a každém dalším tahu se položí po jednom žetonu na všechna neobsazená pole, která svou stranou sousedí s poli obsazenými žetony v předchozích tazích. Teprve po posledním tahu bude ležet na každém poli desky jeden žeton. Na obrázku je stav bezprostředně po třetím tahu. Číslo určuje, v kolikátém tahu se žeton položí na desku. (Není zobrazena celá deska.)



Určete,

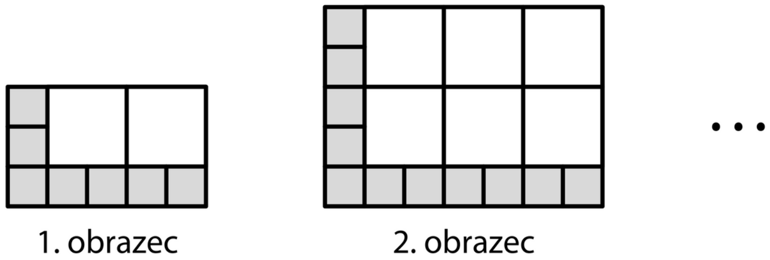
a) kolik žetonů bude celkem na desce bezprostředně po pátém tahu,

b) kolik žetonů se na desku položí v posledním tahu,

c) kolik neobsazených polí bude na desce bezprostředně po 12. tahu.

Úloha 13

Každý obrazec tvaru obdélníku je složen z malých šedých čtverečků a větších bílých čtverečků. Všechny šedé čtverečky jsou stejné a jsou poskládány do spodní řady a do levého sloupce. Zbytek obrazce tvoří bílé čtverečky. Každý bílý čtvereček má dvakrát delší stranu než šedý. První obrazec má ve spodní řadě 5 šedých čtverečků a v levém sloupci 3 šedé čtverečky. Skládá se celkem z 9 čtverečků (bílých i šedých dohromady). Každý další obrazec má oproti předchozímu vždy o 2 šedé čtverečky více jak ve spodní řadě, tak i v levém sloupci.



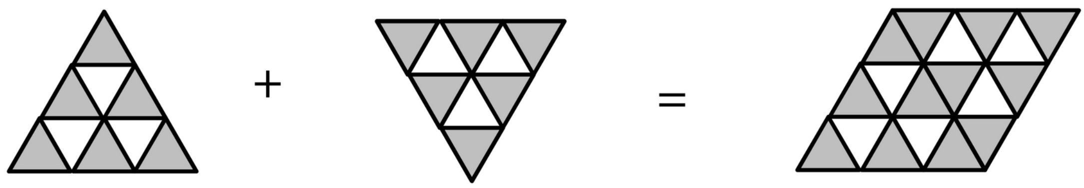
a) Obrazec má ve spodní řadě 41 šedých čtverečků. Určete počet bílých čtverečků v obrazci.

b) V obrazci je 90 bílých čtverečků. Určete počet šedých čtverečků v obrazci.

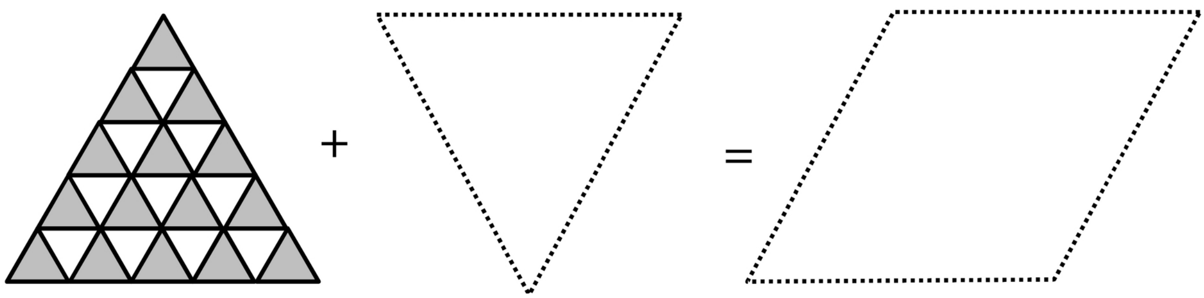
c) Počet všech čtverečků (bílých i šedých dohromady) v posledním a v předposledním obrazci se liší o 106. Určete počet šedých čtverečků v posledním obrazci.

Úloha 14

V rovnostranném trojúhelníku se v jednotlivých řadách pravidelně střídají tmavé a bílé shodné trojúhelníčky. Ze dvou shodných trojúhelníků je vytvořen kosočtverec.



Obdobným způsobem lze z větších trojúhelníků vytvořit kosočtverec s větším počtem řad.



a) Kosočtverec má v každé řadě 4 bílé trojúhelníčky. Určete počet tmavých trojúhelníčků v kosočtverci.

b) Kosočtverec má v každé řadě 6 tmavých trojúhelníčků. Určete počet všech trojúhelníčků (bílých i tmavých) v kosočtverci.

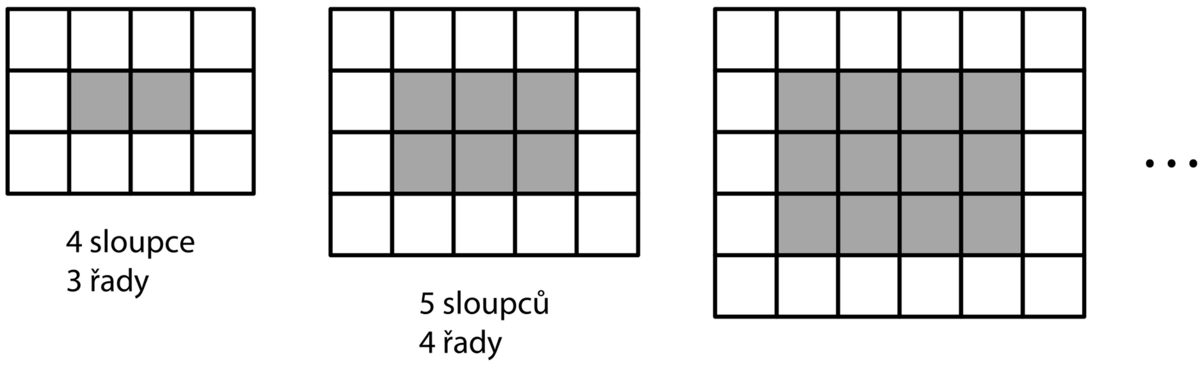
c) Kosočtverec má v každé řadě 21 tmavých trojúhelníčků. Určete počet všech trojúhelníčků (bílých i tmavých) v kosočtverci.

Úloha 15

Obdélníková mozaika z bílých a šedých čtverců se tvoří podle následujících pravidel:

– Počet sloupců v obdélníku je o 1 větší než počet řad.

– Šedý obdélník obklopují bílé čtverce pouze v jedné vrstvě.



Vypočtěte,

a) kolik šedých čtverců je v mozaice, která obsahuje celkem 12 řad,

b) kolik šedých čtverců je v mozaice, která má 70 bílých čtverců,

c) kolik bílých čtverců je v mozaice, která má celkem 380 čtverců (šedých i bílých).

Úloha 16

Dva nebo více shodných obdélníků poskládáme těsně vedle sebe do jedné řady. Pokud se každé dva sousední obdélníky dotýkají kratší stranou, vznikne obrazec typu **A**, dotýkají-li se delší stranou, vznikne obrazec typu **B**.

Platí:

Obvody obrazců typu **A** a **B** složených ze dvou obdélníků se liší o 10 cm.

A

B

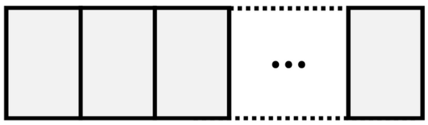
Přidáme-li k oběma obrazcům další obdélníky, rozdíl mezi obvody obou obrazců se změní.

A

B

A

B



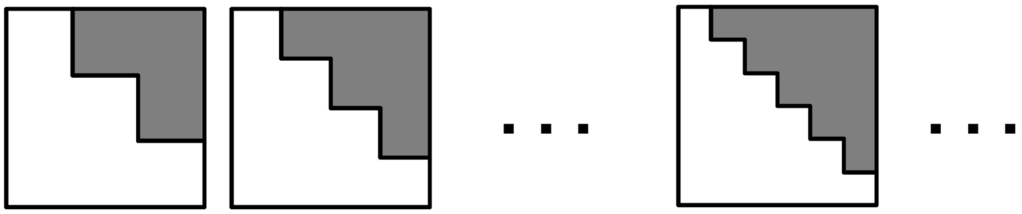
a) Vypočtěte, o kolik cm se liší obvody obrazců **A** a **B**, obsahuje-li každý z nich tři obdélníky.

b) Vypočtěte, o kolik cm se liší obvody obrazců **A** a **B**, obsahuje-li každý z nich šest obdélníků.

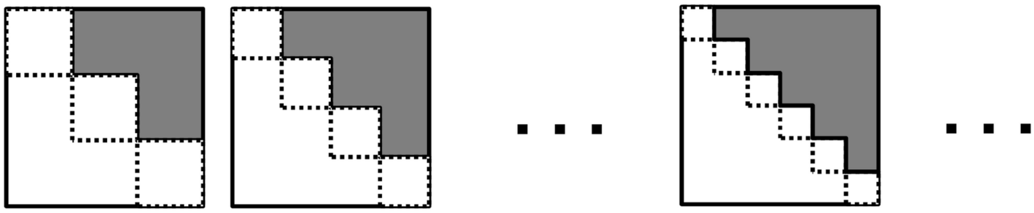
c) Obvody obrazců **A** a **B**, které obsahují stejný počet obdélníků, se liší o 100 cm. Vypočtěte, z kolika obdélníků je složen jeden z těchto obrazců.

Úloha 17

Shodné čtverce jsou podle jednotného pravidla rozděleny vždy na světlou a tmavou plochu.



Obě plochy se liší o 3, 4 nebo více čtverečků, které lze vyznačit po úhlopříčce.



a) Poměr velikostí světlé a tmavé plochy u prvního zobrazeného čtverce je 6 : 3 a v základním tvaru jej zapisujeme 2 : 1.

b) Zapište v základním tvaru poměr velikostí světlé a tmavé plochy čtverce, jestliže se obě plochy liší o 9 čtverečku vyznačených po úhlopříčce.

c) Určete počet čtverečků vyznačených po úhlopříčce, jestliže je poměr velikostí světlé a tmavé plochy 13 : 11.

Úloha 18

Na obrazovce počítače jsou dvě čísla – jedno v modrém a druhé v červeném poli. Na počátku jsou obě čísla stejná. Při každém pípnutí se obě čísla současně zvětší. V modrém poli se číslo zvětší vždy o 6. Přírůstky čísla v červeném poli se pravidelně střídají – jednou se číslo zvětší o 3, při dalším pípnutí o 5, potom znovu o 3, o 5, o 3, o 5, o 3 atd. V jednu chvíli se na obrazovce objeví v modrém poli číslo 500 a současně v červeném poli číslo 400.

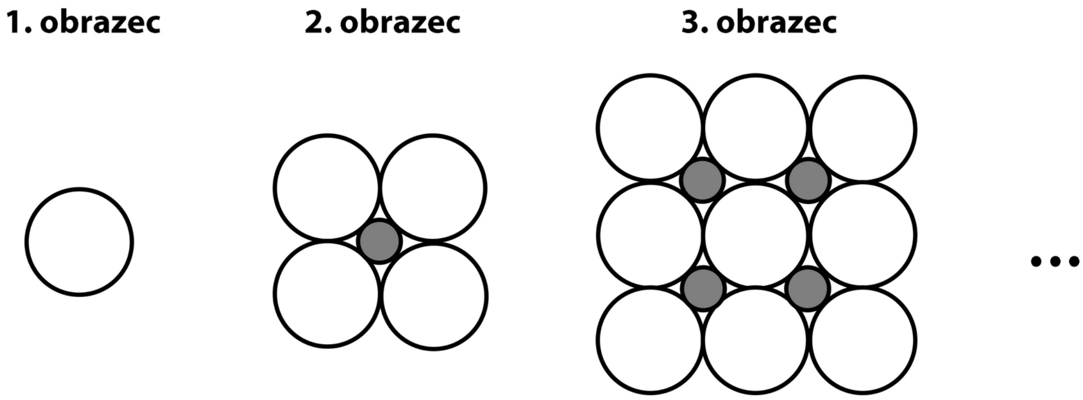
a) Určete, jaké číslo je v modrém poli na počátku.

b) Určete, o kolik se zvětší číslo v modrém poli, zatímco se číslo v červeném poli zvětší o 123.

c) Určete číslo v červeném poli v okamžiku, kdy je o 444 menší než číslo v modrém poli.

Úloha 19

Obrazce jsou tvořeny z velkých bílých a malých tmavých kruhů podle určitého pravidla. První obrazec tvoří jeden velký bílý kruh. Druhý obrazec tvoří čtyři bílé kruhy, jejichž středy tvoří vrcholy čtverce, a jeden tmavý kruh uprostřed. Každé dva sousední kruhy mají společný právě jeden bod. Třetí obrazec je sestaven za dodržení pravidla vytváření obrazců tak, že jej tvoří devět bílých kruhů a čtyři kruhy tmavé. Daným způsobem sestavujeme další obrazce.



a) Kolik velkých bílých kruhů obsahuje osmý obrazec?

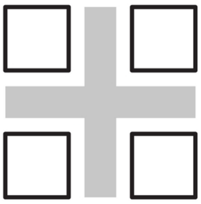
b) Kolikátý obrazec obsahuje 361 malých tmavých kruhů?

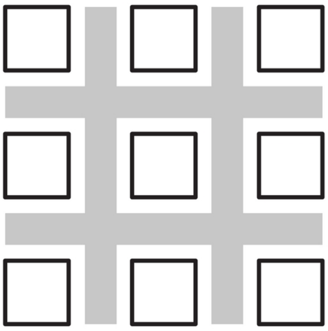
Úloha 20

V počítačové hře má každé čtvercové město následující vlastnosti:

- Čtverečky představují domy a ve všech řadách i sloupcích je jich stejný počet.
- Mezi každými dvěma sousedními domy prochází jedna ulice; je přímá a spojuje protější okraje města. Libovolné dvě ulice jsou buď rovnoběžné, nebo k sobě kolmé.
- Každé dvě navzájem kolmé ulice mají společnou křižovatku.

Na obrázku jsou dvě nejmenší čtvercová města.





Určete,

a) kolik křižovatek je ve městě se 36 domy,

b) kolik ulic je ve městě se 36 křižovatkami,

c) kolik domů je ve městě se 36 ulicemi.

Úloha 21

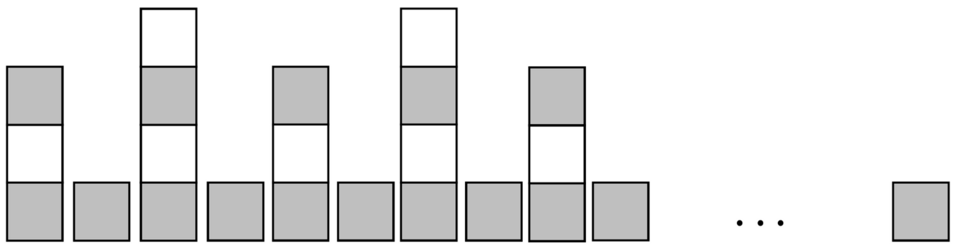
Hradba z kostek splňuje následující pravidla:

I. Pravidelně se střídají věže postavené ze tří a čtyř kostek.

II. Každé dvě věže jsou odděleny jednou tmavou kostkou.

III. V každé věži jsou dvě kostky tmavé.

IV. Vlevo hradba **začíná** nižší věží a vpravo **končí** jednou tmavou kostkou.



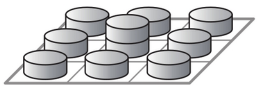
a) Vypočtěte, kolik **bílých** kostek obsahuje hradba se 12 věžemi.

b) Vypočtěte, kolik **tmavých** kostek obsahuje hradba se 12 věžemi.

c) Vypočtěte, kolik **věží** obsahuje hradba postavená ze 180 kostek.

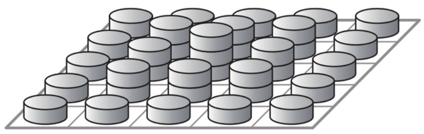
Úloha 22

Na čtvercovou desku **s lichým počtem políček** rozmístíme žetony obdobným způsobem jako na obrázku a rozmístění a počty žetonů zaznamenáme do tabulky.



3 řady a 3 sloupce,
tj. 3 × 3 políčka

1	1	1
1	2	1
1	1	1



5 × 5 políček

1	1	1	1	1
1	2	2	2	1
1	2	3	2	1
1	2	2	2	1
1	1	1	1	1

Následující kroky popisují, jak rozmístíme žetony na čtvercovou desku.

První krok: Na každé políčko po obvodu desky položíme 1 žeton.

Následující kroky: Vybereme vždy všechna prázdná políčka, která bezprostředně sousedí s obsazenými políčky, a na každé z nich položíme o 1 žeton více, než jsme pokládali na jednotlivá políčka v předchozím kroku.

Největší počet žetonů tak bude na prostředním políčku desky.

a) Čtvercová deska má na prostředním políčku 9 žetonů. Určete, kolik políček je **v každé řadě** této čtvercové desky.

b) Žetony rozmístíme na čtvercovou desku, která má 9 × 9 políček. Určete počet všech políček, na nichž leží **právě 2** žetony.

c) Žetony rozmístíme na dvě čtvercové desky, z nichž jedna má 9 × 9 políček, druhá 11 × 11 políček. Určete, **o kolik více** žetonů je na větší desce než na menší desce.

Úloha 23

Při spuštění programu je obrazovka monitoru prázdná. Při každém pípnutí se situace na obrazovce mění:

- Při prvním, třetím a každém **lichém** pípnutí se objeví 2 nové čárky |.
- Při druhém, čtvrtém a každém **sudém** pípnutí se objeví 2 nové pomlčky —.
- Při **každém čtvrtém** pípnutí však jedna nová pomlčka překříží jednu čárku na obrazovce a místo nich vidíme plus **+**.
- Na obrazovce tak mohou být **tři různé** symboly: „čárka“, „pomlčka“ a „plus“.

Symboly na obrazovce
při 1. pípnutí (2 symboly): | |
při 2. pípnutí (4 symboly): | | — —
při 3. pípnutí (6 symbolů): | | — — | |
při 4. pípnutí (7 symbolů): | | — — | + —
při 5. pípnutí (9 symbolů): | | — — | + — | | (5krát |, 3krát — a 1krát +)
atd.

Určete, jaký je na obrazovce počet

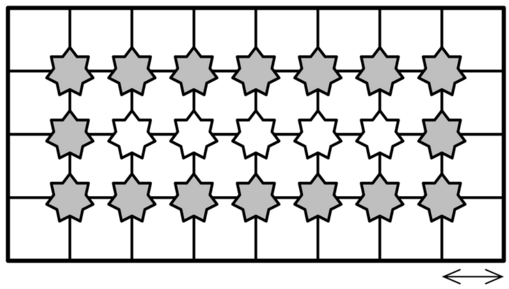
a) symbolů „pomlčka“ — při 10. pípnutí,

b) všech symbolů při 60. pípnutí,

c) symbolů „čárka“ právě ve chvíli, kdy se objevil 7. symbol „plus“ **+**.

Úloha 24

Ve čtvercové síti vytváříme různé obdélníky s vrcholy v mřížových bodech, obdobně jako na obrázku. (Na obrázku je jeden z možných obdélníků, a to s rozměry 8 cm a 4 cm.)



Uvnitř obdélníku zakreslíme v každém mřížovém bodě hvězdičku. Hvězdičky nejblíže hranici obdélníku budou tmavé a ostatní bílé.

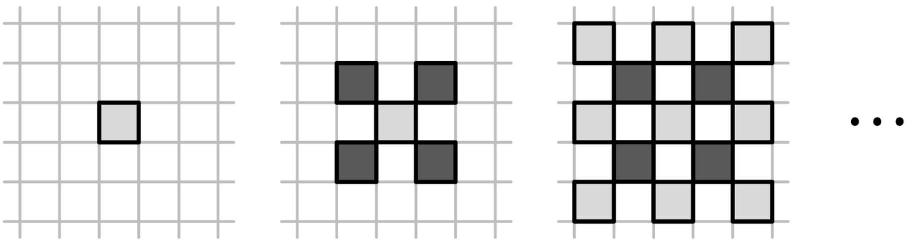
a) Určete počet všech hvězdiček v obdélníku s rozměry 81 cm a 20 cm.

b) Obdélník, jehož jeden rozměr je 50 cm, obsahuje celkem 9 800 hvězdiček. Určete v cm druhý rozměr tohoto obdélníku.

c) Vypočtěte, o kolik se liší počty bílých a tmavých hvězdiček v obdélníku s rozměry 41 cm a 23 cm.

Úloha 25

Vybarvováním některých prázdných polí čtvercové sítě postupně vytváříme obrazce. Prvním obrazcem je jedno světle vybarvené pole čtvercové sítě. Každý další obrazec vytvoříme z předchozího obrazce tak, že vybarvíme všechna prázdná pole, která mají s předchozím obrazcem společné pouze vrcholy. Tato nově vybarvená pole jsou u sudých obrazců tmavá a u lichých obrazců světlá.



1. obrazec 2. obrazec 3. obrazec

Druhý obrazec jsme vytvořili z prvního obrazce vybarvením 4 dalších polí tmavou barvou. Třetí obrazec má celkem 13 polí (9 světlých a 4 tmavé) a vytvořili jsme jej z druhého obrazce vybarvením 8 dalších polí světlou barvou.

Určete,

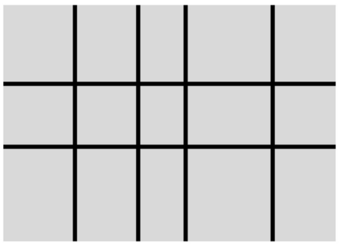
a) vybarvením kolika dalších polí jsme z 8. obrazce vytvořili 9. obrazec,

b) o kolik se liší počet tmavých a světlých polí v 10. obrazci,

c) kolik světlých polí může mít obrazec, který má 400 tmavých polí. Najděte všechna řešení.

Úloha 26

Na čtvrtku papíru narýsujeme rovné čáry, které jsou rovnoběžné s jedním nebo s druhým okrajem čtvrtky. Čáry jsou nakresleny přes celou čtvrtku a rozdělují ji na několik částí.



Např. na obrázku rozděluje 6 rovných čar čtvrtku na 15 částí.

Jaký je **nejmenší** počet rovných čar, které rozdělí čtvrtku na 40 částí?

A) 11

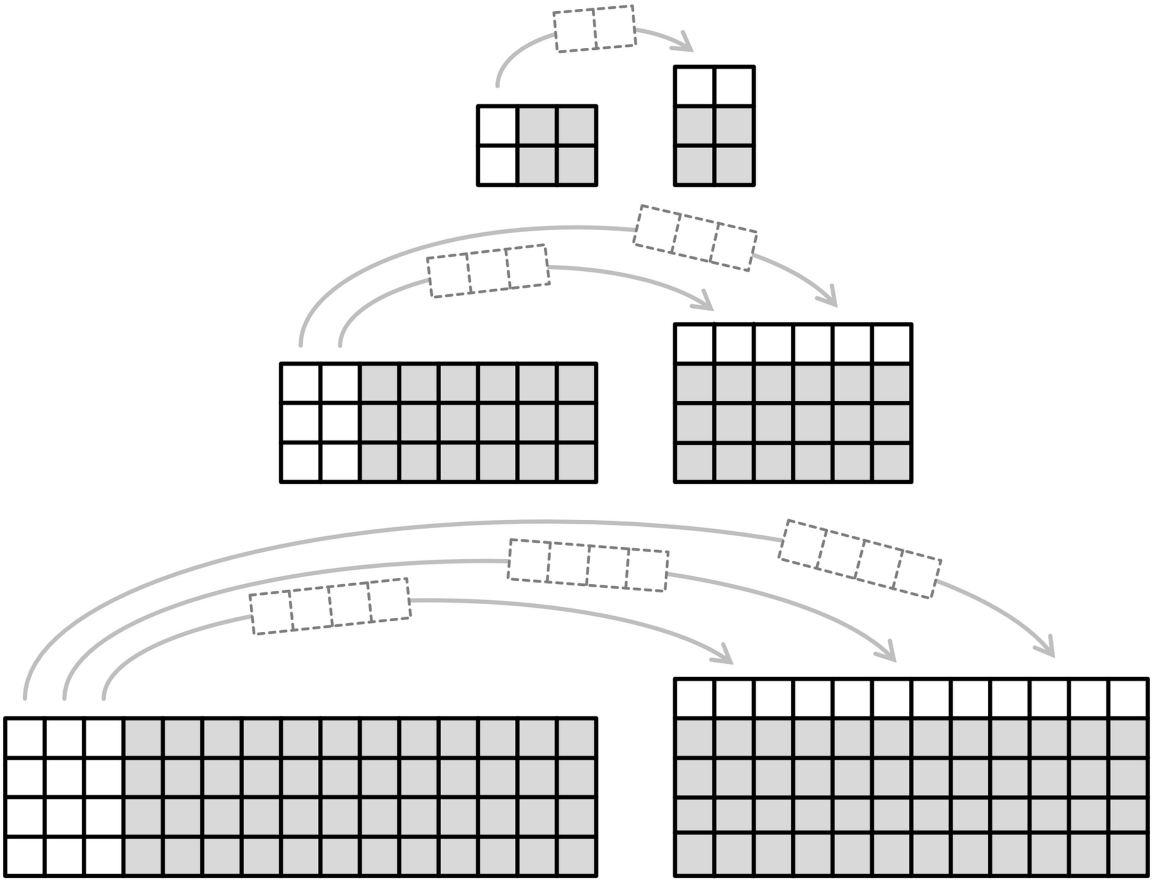
B) 12

C) 13

D) 14

E) větší než 14

Úloha 27



Pro každou dvojici obdélníků sestavených ze stejného počtu čtverečků platí:

- Vyšší z obou obdélníků má vždy o jednu řadu čtverečků více než nižší obdélník.
- Vyšší obdélník vznikne z nižšího obdélníku přesunutím několika sloupců do horní řady.
- Počet přesunutých sloupců je vždy o 1 menší, než je počet řad v nižším obdélníku.

Tedy z obdélníku se 2 řadami se přemístí 1 sloupec, z obdélníku se 3 řadami 2 sloupce atd.

a) V jedné dvojici obdélníků má **nižší** obdélník 21 řad. V této dvojici určete **počet sloupců ve vyšším** obdélníku.

b) V jiné dvojici obdélníků má vyšší obdélník 110 sloupců. V této dvojici určete **počet řad v nižším** obdélníku.